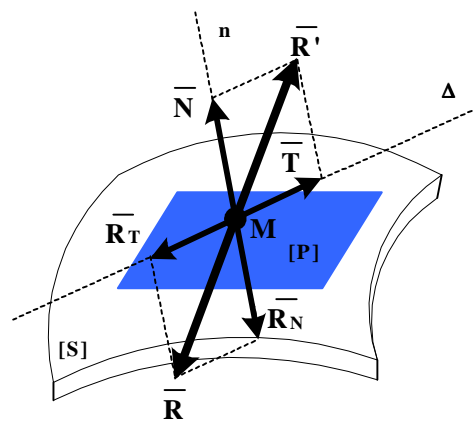


NICOLAE PERIDE  
MIHAELA-GRETI CHIȚU

# CURS DE MECANICĂ PENTRU INGINERI



VOLUMUL I  
STATICA

**Referenți științifici:**

**Prof. univ. dr. doc. ing. RADU P. VOINEA**

**Președintele**

**Academiei Române de Științe Tehnice**

**Prof. univ. dr. ing. VIOREL MAIER**

**Membru Corespondent**

**al Academiei Române de Științe Tehnice**

## Partea întâi

### NOȚIUNI INTRODUCTIVE

#### CAPITOLUL 1

##### OBIECTUL DE STUDIU AL MECANICII

##### 1.1. SCURT ISTORIC

La baza fenomenelor fizice studiate în mecanică – ramură a științelor naturii – stau două noțiuni fundamentale: materia și mișcarea.

**Definiția 1.1:**

*Mecanica se ocupă cu studiul – teoretic și practic – al celei mai simple forme de mișcare a materiei, cunoscută sub numele de mișcare mecanică și definită ca fiind modificarea relativă a poziției unui domeniu material (discret sau continuu) sau a unei părți a acestuia, în raport cu un alt domeniu material considerat ca reper sau în raport cu un sistem de referință presupus fix.*

Observarea fenomenelor naturii pe criteriul formei și dimensiunii domeniilor materiale, pe criteriul vitezei de deplasare și pe criteriul acoperirii legilor teoretice generale și aspectelor aplicative ale fenomenelor fizice analizate, evidențiază complexitatea domeniului de studiu pe care îl acoperă mecanica, știință constituită dintr-un vast conglomerat

## ***CURS DE MECANICĂ PENTRU INGINERI***

---

de ramuri și subramuri, având propria lor individualitate: mecanica clasică - newtoniană, mecanica analitică, mecanica relativistă, mecanica cuantică, etc. – ca ramuri ale mecanicii teoretice – rezistența materialelor, mecanica mediilor continue solide elastice și plastice (teoria elasticității și plasticității), mecanica mediilor continue fluide (lichide și gazoase), mecanica construcțiilor, vibrațiile mecanice, etc. – ca ramuri ale mecanicii aplicate.

Evoluția în timp și progresele înregistrate în dezvoltarea acestei complexe ramuri a științelor naturii care este mecanica, au fost legate de nume celebre ale umanității, filozoful grec *Aristotel*, marele savant al antichității *Arhimede*, astronomul polonez *Nicolaus Copernic*, astronomul german *Johannes Kepler*, matematicianul, fizicianul și astronomul italian *Galileo Galilei*, fiind doar câteva dintre acestea.

Este marele merit al matematicianului, fizicianului și astronomului englez *Isaac Newton* de a fi expus în mod sistematic, în lucrarea sa "*Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*" ("Principiile matematice ale filozofiei naturale"), noțiunile și *principiile mecanicii clasice* – care se constituie azi ca fundament al obiectului de studiu al mecanicii newtoniene.

Newton a enunțat legile mecanicii sub următoarea formă:

*Legea I: Orice corp își păstrează starea de repaus sau de mișcare în linie dreaptă dacă nu este constrâns de forțe imprimabile să-și schimbe starea.*

*Legea a II-a: Variația mișcării este proporțională cu forța motoare imprimată și este dirijată după linia dreaptă în lungul căreia este imprimată forța.*

*Legea a III-a: Reacțiunea este întotdeauna contrară și egală cu acțiunea; sau, acțiunile reciproce a două corpuri sunt întotdeauna egale și dirijate în sensuri contrarii.*

## OBIECTUL DE STUDIU AL MECANICII

---

Studiind mișcarea corpurilor materiale macroscopice, considerate ca solide rigide, nedeformabile, care se deplasează cu viteze mult mai mici decât viteza de deplasare a luminii în vid, teoria științifică lui Newton s-a impus cu o autoritate covârșitoare, legitățile și principiile mecanicii clasice având un asemenea grad de generalitate, încât multă vreme ele au fost considerate ca fiind valabile în egală măsură la scară cosmică și la scară microscopică.

Evoluția în timp a științelor, acumularea sistematică a cunoștințelor în toate domeniile mecanicii, permite azi, reformularea legilor mecanicii postulate de Newton, într-o accepțiune modernă, conformă celor mai recente descoperiri și realizări ale mecanicii, ca ramură a științelor naturii, astfel:

*Legea I: Există cel puțin un sistem de referință în raport cu care un punct material își păstrează starea de repaus sau de mișcare rectilie și uniformă dacă nu este constrâns de forțe imprimabile să-și schimbe starea.*

*Legea a II-a: Derivata în raport cu timpul a impulsului unui punct material liber este egală cu forța imprimată punctului material.*

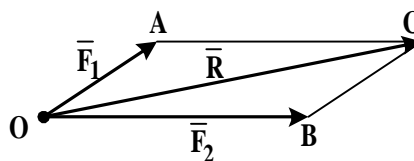
Această lege se scrie

$$\frac{d(m\bar{v})}{dt} = m \frac{d\bar{v}}{dt} = m\bar{a} = \bar{F} \quad (1.1)$$

în care  $\bar{v}$  reprezintă vectorul viteză a cărui mărime este exprimată în [m/s],  $\bar{a}$  reprezintă vectorul accelerație a cărui mărime este exprimată în [m/s<sup>2</sup>], iar  $m$  reprezintă masa punctului material exprimată în [kg].

*Legea a III-a: Acțiunile reciproce a două puncte materiale libere sunt egale în modul, având ca suport dreapta ce unește cele două puncte și sensurile opuse.*

*Principiul paralelogramului: Un punct material liber acționat simultan de două forțe, se mișcă tot așa ca și când asupra lui ar acționa o singură forță, având direcția, sensul și modulul diagonalei paralelogramului care are ca laturi cele două forțe.*



**Fig. 1.1.**

Progresele înregistrate în electromagnetism, datorită eforturilor unor cercetători și mari oameni de știință cum au fost fizicianul scoțian *James Maxwell* și fizicianul german *Heinrich Hertz*, i-au permis renumitului savant *Albert Einstein* să postuleze, prin *teoria relativității*, principiile mecanicii corpurilor materiale care se deplasează cu viteze comparabile cu viteza de deplasare a luminii în vid, formulele mecanicii relativiste diferind de cele ale mecanicii newtoniene, dar tinzând către acestea atunci când vitezele de deplasare scad.

Primele modele ale atomului, imaginate de fizicianul englez *Ernest Rutherford* și de fizicianul danez *Niels Bohr*, i-au oferit fizicianului german *Max Planck* posibilitatea să elaboreze *teoria cuantelor*, teorie ce a fost perfecționată de *Erwin Schrödinger* sub forma *teoriei mecanicii cuantice* care, studiind mișcarea particulelor microscopice, fundamentează relații de calcul care tind către cele ale mecanicii newtoniene pentru un număr foarte mare de particule elementare realizabil în cazul corpurilor macroscopice.

Se poate concluziona că

**Definiția 1.2:**

*Mecanica teoretică* se ocupă cu studiul legilor mișcării mecanice și echilibrului corpurilor materiale având diferite forme și dimensiuni, considerate nedeformabile și care se deplasează cu diferite viteze.

**Definiția 1.3:**

*Mecanica tehnică* studiază aplicațiile practice ale mecanicii teoretice, considerând corpurile materiale deformabile.

**1.2. DIVIZIUNILE MECANICII**

După natura problemelor studiate, mecanica se împarte în trei mari capitole:

**Definiția 1.4:**

*Statica* – se ocupă cu studiul echilibrului corpurilor materiale, analizând sistemele de forțe care-și fac echilibrul, precum și reducerea sistemelor de forțe.

**Definiția 1.5:**

*Cinematica* – se ocupă cu studiul mișcării corpurilor materiale fără a ține seama de masa lor și de forțele care le acționează, realizând un studiu geometric al mișcării.

**Definiția 1.6:**

*Dinamica* – se ocupă cu studiul mișcării corpurilor materiale ținând seama de masa lor și de forțele care le acționează.

**1.3. MĂRIMI FIZICE ȘI UNITĂȚI DE MĂSURĂ  
UTILIZATE ÎN MECANICĂ**

*Mărimile fizice* caracterizează unele însușiri ale materiei cum ar fi proprietățile fizice (volum, masă, densitate), starea materiei (rigiditatea, vâscozitatea, fluiditatea), mișcarea materiei (viteza, accelerația) și altele. Principala caracteristică a acestor mărimi este că sunt măsurabile, deci se pot detecta și evalua cantitativ cu un mijloc de măsurare oarecare.

**Definiția 1.7:**

Conceptul de *mărime fizică* se aplică unei mulțimi de obiecte fizice care se bucură de anumite proprietăți comune și pentru care trebuie să se îndeplinească următoarele condiții:

➤ să existe posibilitatea stabilirii unei *relații de echivalență*, deci a unui criteriu care să permită repartizarea obiectelor în clase de echivalență;

➤ să existe posibilitatea stabilirii unei *relații de ordonare*, deci a unui criteriu care să permită ierarhizarea claselor de echivalență în raport cu o clasă numită zero;

➤ să existe posibilitatea stabilirii unei *relații de comparație*, deci a unui criteriu care să permită aprecierea cantitativă a claselor de echivalență în raport cu o clasă numită unitate.

Odată stabilite aceste trei condiții, o mărime fizică,  $M$ , aparținând unei clase de obiecte fizice, poate fi scrisă sub forma unui produs între o valoare numerică,  $n$  și unitatea de măsură,  $u$ .

$$M = n \cdot u$$

**Definiția 1.8:**

*Măsurarea* este operația de comparare directă sau indirectă a unei mărimi cu o altă mărime de aceeași natură denumită unitate de măsură.

Mărimile fizice din natură nu sunt independente, fiind suficient să se definească un număr restrâns de *mărimi fizice* numite *fundamentale* sau *primitive*, cu ajutorul și prin intermediul cărora se pot defini celelalte *mărimi fizice* numite *derivate*.

*Unitățile de măsură* ale mărimilor fizice astfel alese se numesc *unități de măsură fundamentale* respectiv *unități de măsură derivate*, împreună definind un *sistem de unități de măsură*.



### 1.3.1. Mărimi fizice și unități de măsură fundamentale

Ca știință, mecanica operează cu o categorie de instrumente cunoscute sub denumirea *de mărimi fizice fundamentale* - *spațiul, timpul, masa*.

#### Definiția 1.9:

*Spațiul* este o noțiune care reflectă o formă fundamentală și obiectivă de existență a materiei, caracterizând poziția corpurilor și întinderea lor. În mecanică spațiul este considerat tridimensional, continuu, izotop, omogen și infinit.

Unitatea de măsură pentru spațiu este *metrul*,  $[m]$ : lungimea egală cu  $1650763,73$  lungimi de undă în vid ale radiației care corespunde tranziției atomului de krypton 86 între nivelele sale  $2p_{10}$  și  $5d_5$ .

#### Definiția 1.10:

*Timpul* este o noțiune care reflectă o formă fundamentală și obiectivă de existență a materiei, care caracterizează durata și succesiunea fenomenelor și proceselor materiale. În mecanică, timpul este considerat veșnic, continuu, omogen, uniform crescător și ireversibil.

Unitatea de măsură pentru timp este *secunda*,  $[s]$ : durata de  $9192631770$  perioade ale radiației corespunzătoare tranziției între cele două nivele hiperfine ale stării fundamentale ale atomului de cesiu 133.

#### Definiția 1.11:

*Masa* este o noțiune care reflectă proprietățile generale și obiective de inerție și de gravitație ale materiei.

*Gravitația* este o proprietate generală a materiei care se manifestă prin atracția reciprocă a corpurilor. Ea permite definirea noțiunii de *masă gravifică*, care reprezintă mărimea

scalară pozitivă ce exprimă cantitativ proprietatea materiei de a produce câmp gravitațional. Sub această formă, masa intervine în cunoscuta expresie a legii atracției universale

$$F = k \frac{m_1 m_2}{r} \quad (1.2)$$

*Inerția* este o proprietate generală a materiei care se manifestă prin însușirea corpurilor de a se opune acțiunii altor corpuri de a modifica starea de mișcare sau de repaus relativ. Ea permite definirea noțiunii de *masă inertă*, care reprezintă mărimea scalară pozitivă ce exprimă cantitativ proprietatea de inerție a materiei. Sub această formă, masa intervine în legea fundamentală a mecanicii

$$\bar{F} = m\bar{a} \quad (1.3)$$

Unitatea de măsură pentru masă este *kilogramul*, [kg]: masa prototipului internațional de platină iradiată adoptat în anul 1889 de Conferința Generală de Măsuri și Greutăți și păstrat la Sèvres în Franța.

Prin experiențele de mare precizie făcute până în prezent, nu s-a putut decela nici o diferență între masa gravifică și masa inertă, deși gravitația și inerția sunt proprietăți diferite ale unui corp material. Newton însuși afirmă în "Philosophiae Naturalis Principia Mathematica" că un corp cu cât este mai greu, este mai inert.

### **1.3.2. Mărimi fizice și unități de măsură derivate**

Ca știință, mecanica operează cu o categorie de instrumente cunoscute sub denumirea de mărimi fizice derivate, dintre care vom considera, pentru exemplificare, doar forța.

#### **Definiția 1.12:**

*Forța* este o noțiune care întrunește toate caracteristicile

## OBIECTUL DE STUDIU AL MECANICII

unei mărimi vectoriale și care reflectă fenomenul fizic obiectiv de interacțiune mecanică dintre corpurile materiale.

Unitatea de măsură pentru forță este *newtonul*, *N*: forța care imprimă unui corp cu masa de 1 kg, o accelerație de 1 m/s<sup>2</sup>.

În tehnică sunt întâlnite în mod curent două sisteme de unități de măsură: *sistemul tehnic*, având ca mărimi fizice fundamentale spațiul, timpul și forța și *sistemul fizic*, având ca mărimi fizice fundamentale spațiul, timpul și masa.

**Tabelul 1.1:** Sistemul internațional de unități de măsură

Mărimea	Ecuția dimensională	Unitatea de măsură	Simbolul	Alte sisteme de unități de măsură
<b>unități de măsură fundamentale (primitive)</b>				
lungimea	L	metrul	m	-
masa	M	kilogramul	kg	-
timpul	T	secunda	s	-
<b>unități de măsură derivate</b>				
aria	L <sup>2</sup>	metrul pătrat	m <sup>2</sup>	-
volumul	L <sup>3</sup>	metru cub	m <sup>3</sup>	-
densitatea	ML <sup>-3</sup>	kilogramul pe metru cub	kg/m <sup>3</sup>	-
viteza	LT <sup>-1</sup>	metrul pe secundă	m/s	-
acelerația	LT <sup>-2</sup>	metrul pe secundă la pătrat	m/s <sup>2</sup>	-
frecvența	T <sup>-1</sup>	hertz	Hz	s <sup>-1</sup>
forța	LMT <sup>-2</sup>	newton	N	kgm/s <sup>2</sup>
presiunea	L <sup>-1</sup> MT <sup>-2</sup>	pascal	Pa	N/m <sup>2</sup>
energia, lucrul mecanic	L <sup>2</sup> MT <sup>-2</sup>	joule	J	Nm
puterea	L <sup>2</sup> MT <sup>-3</sup>	watt	W	J/s
unghiul plan	-	radian	rad.	-
viteza unghiulară	T <sup>-1</sup>	radian pe secundă	rad./s	s <sup>-1</sup>
acelerația unghiulară	T <sup>-2</sup>	radian pe secundă la pătrat	rad./s <sup>2</sup>	s <sup>-2</sup>

În prezent, în țara noastră și în numeroase alte țări din lume a fost introdus *sistemul fizic internațional de unități de măsură*, (Tabelul 1.1), având ca unități de măsură fundamentale metrul, [m], pentru lungimi, kilogramul, [kg], pentru masă și secunda, [s], pentru timp.

Pentru a stabili unitățile de măsură derivate se scrie ecuația dimensională a mărimii fizice derivate respective sub forma  $L^a M^b T^c$ , unde a, b, c sunt exponenți numerici și se deduce unitatea de măsură corespunzătoare.

În orice sistem de unități de măsură se pot folosi multiplii sau submultiplii zecimali ai unităților de măsură.

Multiplii			Submultiplii		
Factorul de multiplicare	Prefixul	Simbolul	Factorul de multiplicare	Prefixul	Simbolul
$10^{18}$	exa	E	$10^{-1}$	deci	d
$10^{15}$	peta	P	$10^{-2}$	centi	c
$10^{12}$	tera	T	$10^{-3}$	mili	m
$10^9$	giga	G	$10^{-6}$	micro	$\mu$
$10^6$	mega	M	$10^{-9}$	nano	n
$10^3$	kilo	k	$10^{-12}$	pico	p
$10^2$	hecto	h	$10^{-15}$	femto	f
10	deca	da	$10^{-18}$	atto	a

#### **1.4. Modele teoretice utilizate în mecanică**

Având în vedere complexitatea și varietatea lor, mecanica studiază diferitele domenii materiale și mișcarea acestora, cu ajutorul unor modele schematizate care rețin numai caracteristicile esențiale ale acestora și care le fac proprii pentru calculul matematic.

În mecanică se folosesc ca modele teoretice:

➤ *punctul material*, model care se aplică acelor domenii materiale ale căror dimensiuni sunt neglijabile în raport cu distanțele dintre ele și a căror formă nu joacă practic nici un rol în desfășurarea mișcării. Acest model are ca elemente

## **OBIECTUL DE STUDIU AL MECANICII**

---

caracteristice punctul geometric, ca reprezentant al poziției domeniului material și masa, ca mărime ce caracterizează inerția domeniului considerat.

➤ *linia materială*, model care se aplică acelor domenii materiale la care două dintre dimensiuni, lățimea și grosimea, sunt relativ mici în raport cu lungimea și nu joacă practic nici un rol în desfășurarea mișcării. Acest model are ca elemente caracteristice o linie geometrică care poate fi dreaptă sau curbă, ca reprezentant al axei domeniului material și o masă, distribuită pe unitatea de lungime, ca mărime ce caracterizează inerția domeniului considerat. Liniile materiale pot fi bare dacă opun rezistență la încovoiere sau fire dacă nu opun rezistență la încovoiere.

➤ *suprafața materială*, model care se aplică acelor domenii materiale la care una dintre dimensiuni, grosimea, este relativ mică în raport cu lungimea și lățimea și nu joacă practic nici un rol în desfășurarea mișcării. Acest model are ca elemente caracteristice o suprafață geometrică, plană sau curbă, ca reprezentant al suprafeței mediane a domeniului material și o masă, distribuită pe unitatea de arie, ce caracterizează inerția domeniului considerat. Suprafețele materiale pot fi plăci, dacă opun rezistență la încovoiere, sau membrane dacă nu opun rezistență la încovoiere.

➤ *corpul material*, model care se aplică domeniilor materiale la care cele trei dimensiuni, lungimea, lățimea și grosimea, au ordine de mărime comparabile. Acest model are ca elemente caracteristice volumul geometric și o masă, distribuită pe unitatea de volum, ca o caracteristică a inerției domeniului material considerat. Corpurile materiale se numesc solide rigide dacă rămân nedeformate la acțiunile ce tind să le schimbe forma.

➤ *mediul continuu* sau continuul material, model în care se consideră că întregul spațiu ocupat de domeniul material este

***CURS DE MECANICĂ PENTRU INGINERI***

---

umplut cu substanță, deși este bine cunoscută structura atomică discontinuă a corpurilor.

## CAPITOLUL 2

### NOȚIUNI ELEMENTARE DE CALCUL VECTORIAL

#### 2.1. DEFINIȚII

În mecanică se operează, în mod obișnuit, cu două categorii de mărimi fizice: *mărimi scalare* și *mărimi vectoriale*.

##### Definiția 2.1:

Se numește *mărimă scalară* sau *scalar* o mărime fizică caracterizată printr-un număr real care reprezintă valoarea sa numerică în unitatea de măsură considerată.

Exemple: timpul, masa, temperatura, densitatea, lucrul mecanic, energia, puterea, etc.

##### Definiția 2.2:

Se numește *mărimă vectorială* o mărime fizică caracterizată printr-un număr pozitiv (numit modul, intensitate, mărime sau valoare numerică) și printr-o orientare în spațiu (direcția și sensul pe direcția respectivă).

Exemple: deplasarea, viteza, accelerația, forța, etc.

Elementele unui vector  $\vec{v} = \overline{AB}$ , evidențiate în Figura 2.1, sunt:

- *originea vectorului* sau punctul său de aplicație (punctul A);
- *direcția vectorului* (dreapta suport, precum și oricare altă dreaptă paralelă cu ea);
- *sensul vectorului* (sensul este indicat de vârful săgeții, de la A la B);

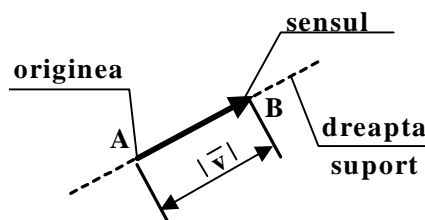


Fig. 2.1.

➤ *modulul vectorului* (numărul pozitiv care reprezintă lungimea segmentului AB) și care se notează  $|\vec{v}|$ .

## 2.2. OPERAȚII CU VECTORI

### 2.2.1. Sistemul cartezian de referință

#### Definiția 2.3:

Se numește *sistem de referință cartezian*, un ansamblu de trei axe concurente și necoplanare.

Dacă axele sunt și perpendiculare între ele, sistemul de referință se numește cartezian *triortogonal*.

Un sistem de referință Oxyz (ordinea axelor fiind Ox, Oy, Oz) este *drept* dacă, pentru a aduce axa Ox peste axa Oy printr-o rotație de unghi mai mic de  $\pi$ , ea trebuie rotită în sens direct (în sens trigonometric) în planul xOy.

#### Definiția 2.4:

Se numește *versor* sau *vector unitate* al unei axe  $\Delta$  un vector  $\vec{u}$  de modul egal cu unitatea, având originea situată pe axă, direcția și sensul axei.

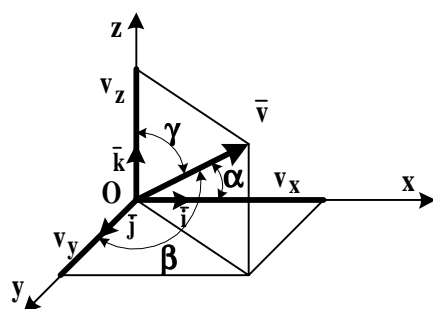


Fig. 2.2.

Versorii axelor de coordonate ale sistemului de referință cartezian triortogonal sunt  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$ .

Dacă  $v_x, v_y, v_z$  sunt proiecțiile vectorului  $\vec{v}$  pe axele sistemului cartezian de referință și  $\alpha, \beta, \gamma$  sunt unghiurile (numite unghiuri directe) pe care vectorul



## NOȚIUNI ELEMENTARE DE CALCUL VECTORIAL

$\vec{v}$  le face cu aceste axe, așa cum se vede în Figura 2.2, atunci sunt valabile relațiile care dau mărimea și orientarea vectorului considerat:

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}; \quad v = |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}; \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{v_x}{v} = \frac{v_x}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}}; \\ \cos \beta &= \frac{v_y}{v} = \frac{v_y}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}}; \\ \cos \gamma &= \frac{v_z}{v} = \frac{v_z}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Vectorii se pot clasifica după cum urmează:

- vectori liberi
- vectori alunecători;
- vectori legați.

### Definiția 2.5:

Se numește *liber*, vectorul care, păstrându-și modulul, direcția și sensul, își poate muta originea în orice punct din spațiu.

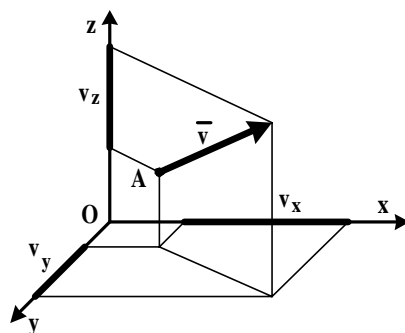
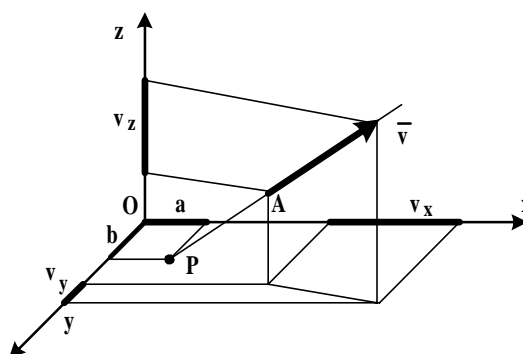


Fig. 2.3. a

În cazul reprezentării lor în sistemul cartezian triortogonal, vectorii liberi sunt caracterizați de trei mărimi scalare independente, reprezentate în Figura 2.3a, de proiecțiile pe axele triedrului de referință,  $v_x, v_y, v_z$ .

**Definiția 2.6:**

Doi vectori liberi se numesc *egali* sau *echipolenți* dacă și numai dacă au drepte suport paralele, au același sens și același modul.



**Fig. 2.3. b**

**Definiția 2.7:**

Se numește *alunecător*, vectorul care, păstrându-și modulul, direcția și sensul, își poate muta originea în orice punct, P, de pe dreapta sa suport.

În cazul reprezentării lor în sistemul cartezian triortogonal, vectorii alunecători sunt caracterizați de un număr de cinci mărimi scalare independente, reprezentate în Figura 2.3.b, de proiecțiile lor pe axele triedrului de referință,  $v_x$ ,  $v_y$ ,  $v_z$  și de două coordonate, a și b.

**Definiția 2.8:**

Doi vectori alunecători se numesc *egali* sau *echivalenți* dacă și numai dacă au aceeași dreaptă suport, au același sens și același modul.

**Definiția 2.9:**

Se numește *legat*, vectorul care își păstrează neschimbate toate elementele (modulul, direcția, sensul și punctul de aplicație).

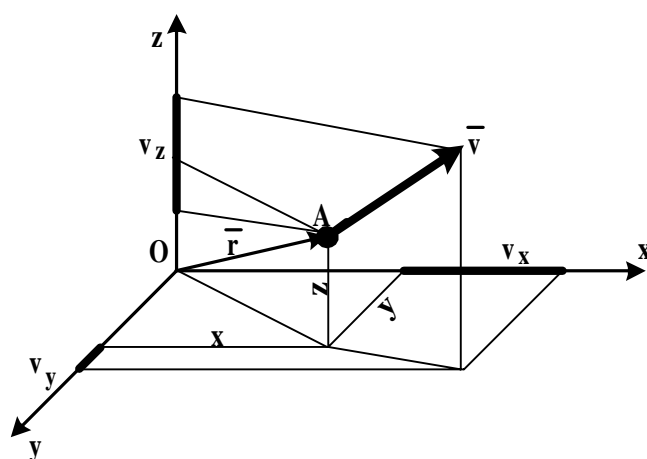


Fig. 2.3. c

În cazul reprezentării lor în sistemul cartezian triortogonal, vectorii legați pot fi caracterizați de șase mărimi scalare independente, reprezentate în Figura 2.3.c, de proiecțiile lor pe axele triedrului de referință,  $v_x, v_y, v_z$  și de trei coordonate,  $x, y$  și  $z$ .

**Definiția 2.10:**

Doi vectori legați se numesc *egali* sau *identici* dacă au aceeași dreaptă suport, au aceeași origine, sens și modul.

**2.2.2. Suma vectorilor**

**Definiția 2.11:**

Suma a doi vectori  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$  este un vector  $\vec{c}$ , reprezentat în modul, direcție și sens prin diagonala paralelogramului având ca laturi acești vectori. (Figura 2.4.)

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} \quad (2.3)$$

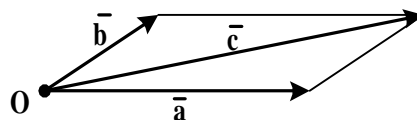


Fig. 2.4.

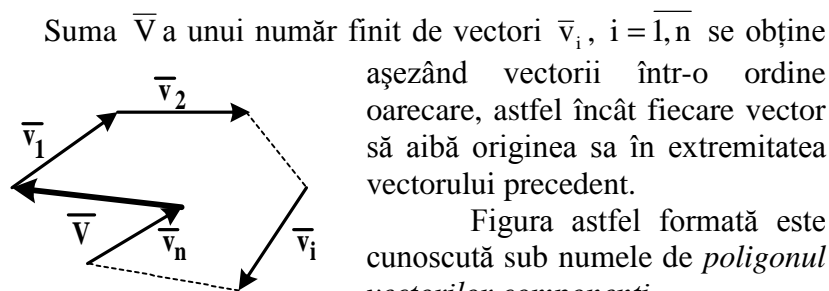


Fig. 2.5.

Vectorul  $\bar{V}$  are ca origine, originea primului vector și ca extremitate, extremitatea ultimului vector considerat, așa cum se vede în Figura 2.5.

În sistemul cartezian triortogonal, suma a doi vectori  $\bar{a} = a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k}$  și  $\bar{b} = b_x \bar{i} + b_y \bar{j} + b_z \bar{k}$  este un vector,  $\bar{c} = c_x \bar{i} + c_y \bar{j} + c_z \bar{k}$ , care este dat de relația

$$\bar{c} = \bar{a} + \bar{b} = (a_x + b_x) \bar{i} + (a_y + b_y) \bar{j} + (a_z + b_z) \bar{k} \quad (2.4)$$

Suma unui număr finit de vectori  $\bar{v}_i = v_{ix} \bar{i} + v_{iy} \bar{j} + v_{iz} \bar{k}$ ,  $i = \overline{1, n}$ , este vectorul

$$\bar{V} = \bar{i} \sum_{i=1}^n v_{ix} + \bar{j} \sum_{i=1}^n v_{iy} + \bar{k} \sum_{i=1}^n v_{iz} \quad (2.5)$$

Suma vectorilor se bucură de următoarele proprietăți:

➤ comutativitate

$$\bar{v}_1 + \bar{v}_2 = \bar{v}_2 + \bar{v}_1 \quad (2.6)$$

➤ asociativitate

$$(\bar{v}_1 + \bar{v}_2) + \bar{v}_3 = \bar{v}_1 + (\bar{v}_2 + \bar{v}_3) \quad (2.7)$$

- există element neutru

$$0 + \bar{v} = \bar{v} \quad (2.8)$$

### 2.2.3. Înmulțirea unui vector cu un scalar

#### **Definiția 2.12:**

Prin *înmulțirea* unui vector  $\bar{v}$  cu un scalar  $m$ , se obține un vector  $\overline{mv}$  al cărui modul este dat de relația  $|\overline{mv}| = m \cdot |\bar{v}|$ , a cărui direcție coincide cu cea a vectorului  $\bar{v}$ , sensul fiind același cu cel al vectorului  $\bar{v}$  dacă  $m > 0$  și invers acestuia dacă  $m < 0$ .

În sistemul cartezian triortogonal, prin înmulțirea vectorului  $\bar{a} = a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k}$  cu scalarul  $m$ , se obține vectorul

$$\overline{ma} = m \cdot \bar{a} = ma_x \bar{i} + ma_y \bar{j} + ma_z \bar{k} \quad (2.9)$$

Produsul unui vector cu un scalar se bucură de următoarele proprietăți:

- există element neutru

$$1 \cdot \bar{v} = \bar{v} \quad (2.10)$$

- există element nul

$$0 \cdot \bar{v} = 0 \quad (2.11)$$

- asociativitate mixtă

$$m(n \cdot \bar{v}) = (m \cdot n)\bar{v} \quad (2.12)$$

- distributivitate în raport cu adunarea

$$\begin{aligned} (m + n)\bar{v} &= m\bar{v} + n\bar{v} \\ m(\bar{a} + \bar{b}) &= m\bar{a} + m\bar{b} \end{aligned} \quad (2.13)$$

#### 2.2.4. Produsul scalar a doi vectori

##### Definiția 2.13:

Produsul scalar a doi vectori  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$  este un scalar  $m$ , care se obține multiplicând modulele celor doi vectori cu cosinusul unghiului dintre dreptele lor suport:

$$m = \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b}) \quad (2.14)$$

În sistemul cartezian triortogonal, produsul scalar a doi vectori  $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$  și  $\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$  este un scalar

$$m = \vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \quad (2.15)$$

Produsul scalar a doi vectori se bucură de următoarele proprietăți:

- comutativitate

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} \quad (2.16)$$

- distributivitate în raport cu adunarea

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c} \quad (2.17)$$

- produsul scalar a doi vectori nu este asociativ

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \cdot \vec{c}) \neq (\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c} \quad (2.18)$$

- produsul scalar a doi vectori este nul dacă și numai dacă vectorii sunt perpendiculari sau dacă unul dintre ei este nul.

#### 2.2.5. Produsul vectorial a doi vectori

##### Definiția 2.14:

Produsul vectorial a doi vectori  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$  este un vector  $\vec{v}$  normal pe planul format de cei doi vectori, având sensul dat de

## NOȚIUNI ELEMENTARE DE CALCUL VECTORIAL

regula burghiului drept și modulul dat de produsul modulelor celor doi vectori cu sinusul unghiului dintre dreptele lor suport:

$$\begin{aligned}\bar{v} &= \bar{a} \times \bar{b} \\ |\bar{v}| &= |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \sin(\bar{a}, \bar{b})\end{aligned}\tag{2.19}$$

Direcția vectorului  $\bar{v}$  este perpendiculară pe planul format de vectorii  $\bar{a}$  și  $\bar{b}$ , iar sensul este dat de regula burghiului drept.

În sistemul cartezian triortogonal, produsul vectorial a doi vectori  $\bar{a} = a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k}$  și  $\bar{b} = b_x \bar{i} + b_y \bar{j} + b_z \bar{k}$  este un vector

$$\begin{aligned}\bar{v} = \bar{a} \times \bar{b} &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \\ &= (a_y b_z - a_z b_y) \bar{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \bar{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \bar{k}\end{aligned}\tag{2.20}$$

Produsul vectorial a doi vectori se bucură de următoarele proprietăți:

➤ anticomutativitate

$$\bar{a} \times \bar{b} = -\bar{b} \times \bar{a}\tag{2.21}$$

➤ distributivitate în raport cu adunarea

$$(\bar{a} + \bar{b}) \times \bar{c} = \bar{a} \times \bar{c} + \bar{b} \times \bar{c}\tag{2.22}$$

➤ produsul vectorial a doi vectori nu este asociativ

$$\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c}) \neq (\bar{a} \times \bar{b}) \times \bar{c}\tag{2.23}$$

➤ produsul vectorial a doi vectori este nul dacă și numai dacă vectorii sunt paraleli (coliniari) sau dacă unul dintre vectori este nul.

### 2.2.6. Produsul mixt

#### Definiția 2.15:

*Produsul mixt* a trei vectori  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  și  $\vec{c}$  este, prin definiție, un scalar  $m$ , rezultat al produsului scalar dintre vectorul  $\vec{a}$  și produsul vectorial  $\vec{b} \times \vec{c}$ .

$$m = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) \quad (2.24)$$

În sistemul cartezian triortogonal, produsul mixt al vectorilor  $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$ ,  $\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$  și  $\vec{c} = c_x \vec{i} + c_y \vec{j} + c_z \vec{k}$  este scalarul

$$\begin{aligned} m = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) &= \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \\ &= (b_y c_z - b_z c_y) a_x - (b_x c_z - b_z c_x) a_y + (b_x c_y - b_y c_x) a_z \end{aligned} \quad (2.25)$$

Produsul mixt se bucură de următoarele proprietăți:

➤ produsul mixt este invariant dacă se permută circular factorii săi

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) \quad (2.26)$$

➤ produsul mixt își schimbă semnul dacă se permută între ei doi termeni

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = -\vec{a} \cdot (\vec{c} \times \vec{b}) \quad (2.27)$$



➤ produsul mixt este nul dacă și numai dacă vectorii sunt coplanari sau dacă unul din termeni este nul.

**Observația 2.1:**

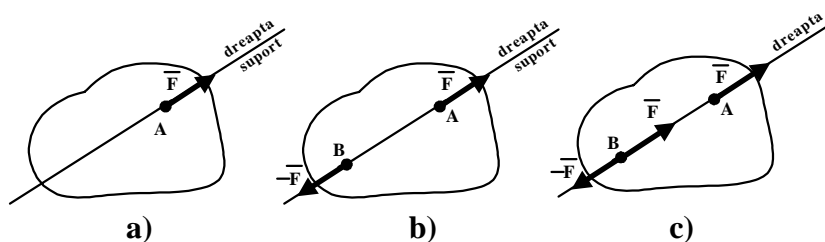
Între versorii axelor de coordonate ale sistemului de referință cartezian triortogonal se pot scrie următoarele relații:

$$\begin{aligned}\bar{i}^2 = \bar{j}^2 = \bar{k}^2 &= 1; \quad \bar{i} \cdot \bar{j} = \bar{j} \cdot \bar{k} = \bar{k} \cdot \bar{i} = 0; \\ \bar{i} \times \bar{j} &= \bar{k}; \quad \bar{j} \times \bar{k} = \bar{i}; \quad \bar{k} \times \bar{i} = \bar{j}; \\ \bar{j} \times \bar{i} &= -\bar{k}; \quad \bar{k} \times \bar{j} = -\bar{i}; \quad \bar{i} \times \bar{k} = -\bar{j}; \\ \bar{i} \cdot (\bar{j} \times \bar{k}) &= \bar{j} \cdot (\bar{k} \times \bar{i}) = \bar{k} \cdot (\bar{i} \times \bar{j}) = 1; \\ \bar{j} \cdot (\bar{i} \times \bar{k}) &= \bar{k} \cdot (\bar{i} \times \bar{j}) = \bar{i} \cdot (\bar{k} \times \bar{j}) = -1\end{aligned}\quad (2.28)$$

## 2.3. FORȚA – MĂRIME VECTORIALĂ

### 2.3.1. Forța ca vector alunecător

În mecanică se lucrează, cel mai adesea, cu un model idealizat de corp material, numit *solid rigid*, caracterizat de faptul că rămâne nedeformat la acțiunile ce tind să-i schimbe forma (distanța dintre două puncte oarecare ale sale este constantă, oricare ar fi forțele ce acționează asupra corpului).



**Fig. 2.6**

În Figura 2.6 a, asupra unui solid rigid acționează forța  $\bar{F}$  aplicată în punctul A. Se poate demonstra că efectul acestei forțe asupra solidului rigid, rămâne același, indiferent unde s-ar găsi forța pe suportul său. Dacă în punctul B, așa cum se arată în

Figura 2.6 c, se aplică sistemul de forțe  $\vec{F}$  și  $-\vec{F}$ , echivalent cu zero, efectul mecanic exercitat asupra solidului rigid nu se modifică. În particular, forța  $\vec{F}$  aplicată în punctul A și forța  $-\vec{F}$  aplicată în punctul B, având ca suport dreapta AB nu au nici un efect asupra rigidului (Figura 2.6 b) rezultanta lor fiind nulă. Prin urmare, asupra solidului rigid acționează numai efectul mecanic dat de forța  $\vec{F}$  aplicată în punctul B.

Având același efect mecanic asupra solidului rigid, forța  $\vec{F}$  aplicată în punctul A și forța  $\vec{F}$  aplicată în punctul B, se numesc *echivalente*, sau, cu alte cuvinte, *prin alunecarea pe dreapta sa suport, din punctul A în punctul B, forța  $\vec{F}$  nu modifică efectul mecanic asupra solidului rigid. Deci forța  $\vec{F}$  are caracterul unui vector alunecător.*

### 2.3.2. Momentul unei forțe în raport cu un punct

#### Definiția 2.16:

Momentul unei forțe  $\vec{F}$  în raport cu un punct  $O$  numit *pol*, este dat de produsul vectorial dintre vectorul de poziție  $\vec{r}$  al punctului de aplicație A al forței și vectorul forță  $\vec{F}$ .

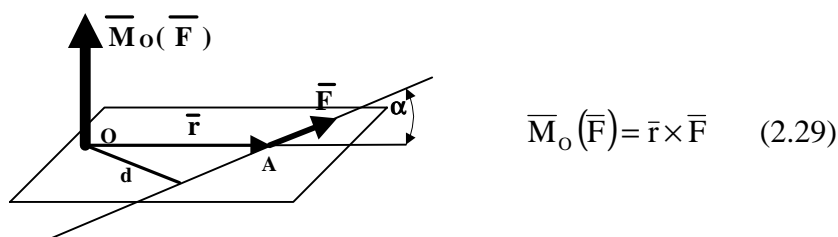


Fig. 2.7.

Momentul  $\vec{M}_O(\vec{F})$  este un vector legat, aplicat în punctul  $O$ , care are, corespunzător definiției, direcția perpendiculară pe planul format de vectorii  $\vec{r}$  și  $\vec{F}$ , sensul dat de regula burghiului drept și modulul dat de relația

$$\begin{aligned} |\overline{M}_O(\overline{F})| &= |\overline{r}| \cdot |\overline{F}| \cdot \sin(\overline{r}, \overline{F}) = \\ &= |\overline{r}| \cdot |\overline{F}| \cdot \sin \alpha = |\overline{F}| \cdot d \end{aligned} \quad (2.30)$$

În relația (2.30),  $d$  se numește *brațul forței* și reprezintă distanța de la punctul  $O$  la dreapta suport a forței  $\overline{F}$ , iar  $\alpha$  reprezintă unghiul dintre dreptele suport ale vectorilor  $\overline{r}$  și  $\overline{F}$ .

Într-un sistem cartezian triortogonal, când vectorii  $\overline{r}$  și  $\overline{F}$  sunt dați prin componentele lor,  $\overline{r} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}$  respectiv  $\overline{F} = F_x\overline{i} + F_y\overline{j} + F_z\overline{k}$ , expresia analitică a momentului unei forțe  $\overline{F}$  în raport cu un punct  $O$  numit pol,

$$\overline{M}_O(\overline{F}) = M_{Ox}\overline{i} + M_{Oy}\overline{j} + M_{Oz}\overline{k} \quad (2.31)$$

este dată de relația

$$\begin{aligned} \overline{M}_O(\overline{F}) = \overline{r} \times \overline{F} &= \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \\ &= (yF_z - zF_y)\overline{i} + (zF_x - xF_z)\overline{j} + (xF_y - yF_x)\overline{k} \end{aligned} \quad (2.32)$$

Identificând membru cu membru relațiile (2.31) și (2.32), se obțin expresiile proiecțiilor momentului,  $\overline{M}_O(\overline{F})$ , unei forțe în raport cu un punct, pe axele sistemului cartezian de coordonate

$$\begin{aligned} M_{Ox} &= yF_z - zF_y; \\ M_{Oy} &= zF_x - xF_z; \\ M_{Oz} &= xF_y - yF_x. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Momentul,  $\overline{M}_O(\overline{F})$ , unei forțe în raport cu un punct, se bucură de toate proprietățile produsului vectorial, la care se adaugă:

➤ este nul dacă produsul vectorial  $\overline{r} \times \overline{F}$  este nul ( $\overline{r} = 0$ ,  $\overline{F} = 0$ ,  $\overline{r} \parallel \overline{F}$ ) sau, cu alte cuvinte, când punctul O se află pe dreapta suport a forței.

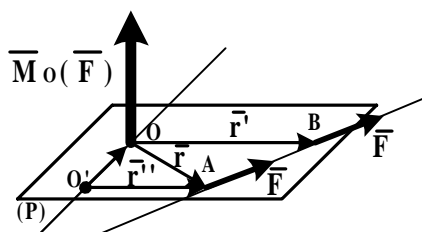


Fig. 2.8.

➤ este invariant la operația de lunecare a forței  $\overline{F}$  pe dreapta sa suport. Într-adevăr, analizând Figura 2.8,

$$\overline{M}_O(\overline{F}) = \overline{r} \times \overline{F} = (\overline{r} + \overline{AB}) \times \overline{F} = \overline{r} \times \overline{F} + \overline{AB} \times \overline{F} = \overline{r} \times \overline{F} = \overline{M}_O(\overline{F})$$

deoarece  $\overline{AB} \times \overline{F} = 0$ , vectorii  $\overline{AB}$  și  $\overline{F}$  fiind coliniari.

➤ variază dacă se schimbă poziția polului din O în O', dreapta suport a forței  $\overline{F}$  rămânând neschimbată. Într-adevăr, analizând Figura 2.8,

$$\overline{M}_{O'}(\overline{F}) = \overline{r}' \times \overline{F} = (\overline{OO'} + \overline{r}) \times \overline{F} = \overline{OO'} \times \overline{F} + \overline{r} \times \overline{F} = \overline{OO'} \times \overline{F} + \overline{M}_O(\overline{F})$$

### Observația 2.2:

Dacă polul O se deplasează pe o dreaptă paralelă cu dreapta suport a forței, atunci momentul forței în raport cu acest punct numit pol, este invariant la schimbarea poziției sale.

➤ între proiecțiile forței  $\overline{F}$  pe axele sistemului cartezian de

coordonate și proiecțiile momentului  $\overline{M}_O(\overline{F})$  dat de această forță în raport cu punctul O, pe axele aceluiași sistem de axe de coordonate, există o relație scalară identic satisfăcută și care exprimă perpendicularitatea celor doi vectori

$$\overline{F} \cdot \overline{M}_O(\overline{F}) = 0$$

sau, dezvoltat,

$$\begin{aligned} F_x M_{Ox} + F_y M_{Oy} + F_z M_{Oz} &= 0 \\ F_x (yF_z - zF_y) + F_y (zF_x - xF_z) + F_z (xF_y - yF_x) &= 0 \end{aligned}$$

**Observația 2.3:**

Proiecțiile forței  $\overline{F}$  pe axele sistemului cartezian de coordonate și proiecțiile momentului  $\overline{M}_O(\overline{F})$  dat de această forță în raport cu punctul O, pe axele aceluiași sistem de axe de coordonate, caracterizează vectorul  $\overline{F}$  ca vector alunecător.

Momentul forței în raport cu un punct rămânând același când forța alunecă pe suportul ei, permite folosirea lui pentru indicarea suportului forței. Acest suport se află într-un plan perpendicular pe direcția momentului, la distanța  $d = \frac{|\overline{M}_O(\overline{F})|}{|\overline{F}|}$  și

de acea parte a lui O care corespunde sensului momentului (forța aflată pe acest suport trebuie să rotească burghiul astfel încât el să înainteze în sensul momentului).

**2.3.3. Momentul unei forțe în raport cu o axă**

**Definiția 2.17:**

*Momentul unei forțe  $\overline{F}$  în raport cu o axă  $(\Delta)$ , de versor  $\overline{u}$ , este dat de proiecția pe axă a momentului forței  $\overline{F}$  în raport cu un punct O oarecare al axei (Figura 2.9).*

$$M_{\Delta}(\vec{F}) = |\vec{M}_O(\vec{F})| \cos \alpha = \vec{M}_O(\vec{F}) \cdot \vec{u} = (\vec{r} \times \vec{F}) \cdot \vec{u} \quad (2.34)$$

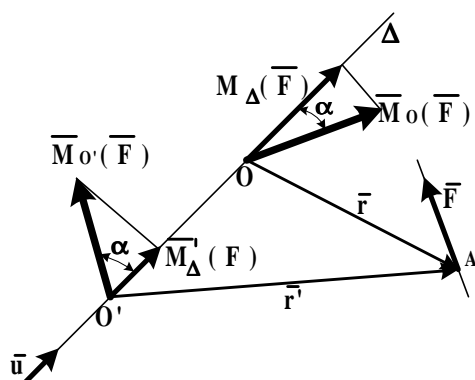


Fig. 2.9.

Deci, momentul unui vector în raport cu o axă este produsul mixt dintre vectorii  $\vec{r}$ ,  $\vec{F}$  și versorul  $\vec{u}$  al axei ( $\Delta$ ), și, în consecință, se bucură de toate proprietățile produsului mixt.

Pentru ca definiția formulată să aibă sens, este necesar să se demonstreze că momentul unei forțe  $\vec{F}$  în raport cu o axă ( $\Delta$ ), de versor  $\vec{u}$ , nu depinde de poziția punctului O pe axă.

Analizând Figura 2.9 se scrie

$$\begin{aligned} M'_{\Delta}(\vec{F}) &= (\vec{r}' \times \vec{F}) \cdot \vec{u} = ((\vec{O'O} + \vec{r}) \times \vec{F}) \cdot \vec{u} = \\ &= (\vec{O'O} \times \vec{F}) \cdot \vec{u} + (\vec{r} \times \vec{F}) \cdot \vec{u} = M_{\Delta}(\vec{F}) \end{aligned} \quad (2.35)$$

deoarece  $(\vec{O'O} \times \vec{F}) \cdot \vec{u} = 0$ , vectorii  $\vec{O'O}$  și  $\vec{u}$  fiind coliniari.

În practică, momentul unei forțe în raport cu o axă se determină proiectând forța pe un plan perpendicular pe axă și calculând momentul acestei proiecții în raport cu punctul în care axa înțeapă planul.

Într-adevăr, dacă se descompune forța după direcția axei și după direcția paralelă cu proiecția ei pe planul perpendicular pe axă (Figura 2.10) atunci rezultă

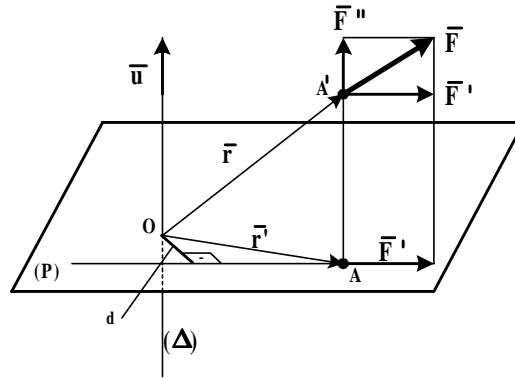


Fig. 2.10.

$$\begin{aligned}
 M_{\Delta}(\bar{F}) &= (\bar{r} \times \bar{F}) \cdot \bar{u} = \\
 &= ((\bar{r}' + \overline{AA'}) \times (\bar{F}' + \bar{F}'')) \cdot \bar{u} = \\
 &= (\bar{r}' \times \bar{F}') \cdot \bar{u} + (\bar{r}' \times \bar{F}'') \cdot \bar{u} + (\overline{AA'} \times \bar{F}') \cdot \bar{u} + (\overline{AA'} \times \bar{F}'') \cdot \bar{u} = \\
 &= (\bar{r}' \times \bar{F}') \cdot \bar{u} = \overline{M}_O(\bar{F}') = \pm |\overline{M}_O(\bar{F}')|
 \end{aligned} \tag{2.36}$$

În relația (2.36), trei dintre produsele mixte sunt nule deoarece au cel puțin câte doi vectori paraleli cu axa  $(\Delta)$ .

Semnele  $+$  și  $-$  din aceeași relație dovedesc faptul că momentul unei forțe în raport cu o axă este un scalar pozitiv dacă proiecția sa pe axă are sensul versorului  $\bar{u}$  și negativ dacă are sensul contrar acestuia.

#### Observația 2.4:

În aplicațiile tehnice, intervine frecvent noțiunea de *moment al unei forțe în raport cu un punct în plan*, care este, de fapt, un scalar care exprimă momentul forței în raport cu o axă, perpendiculară pe plan, pe care îl înțeapă în punctul respectiv.

#### 2.3.4. Cuplu de forțe

##### Definiția 2.18:

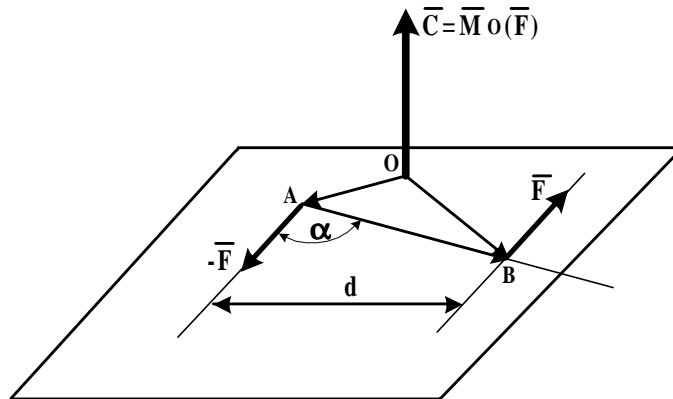
Un sistem de două forțe  $\bar{F}$  și  $-\bar{F}$ , egale în modul, parale-

le, opuse ca sens și acționând pe suporturi diferite, se numește *cuplu de forțe*.

Cuplul de forțe,  $(\vec{F}, -\vec{F})$ , aplicat unui solid rigid, are rezultanta nulă și îi imprimă acestuia un efect mecanic de rotație.

Momentul,  $\vec{C}$ , al cuplului de forțe,  $(\vec{F}, -\vec{F})$ , în raport cu punctul O, este dat de suma momentelor celor două forțe care alcătuiesc cuplul, în raport cu punctul O. (Figura 2.11).

$$\vec{C} = \vec{OA} \times (-\vec{F}) + \vec{OB} \times \vec{F} = (\vec{OB} - \vec{OA}) \times \vec{F} = \vec{AB} \times \vec{F} \quad (2.37)$$



**Fig. 2.11.**

Momentul,  $\vec{C}$ , al cuplului de forțe,  $(\vec{F}, -\vec{F})$ , în raport cu punctul O, este un vector liber (nu depinde de punctul O, putând fi aplicat în orice punct din spațiu), care are direcția perpendiculară pe planul format de cele două forțe care alcătuiesc cuplul, sensul dat de regula burghiului drept (Figura 2.11) și modulul dat de relația

$$\begin{aligned} |\vec{C}| &= |\vec{AB} \times \vec{F}| = |\vec{AB}| \cdot |\vec{F}| \cdot \sin(\angle \vec{AB}, \vec{F}) = \\ &= |\vec{AB}| \cdot |\vec{F}| \cdot \sin \alpha = |\vec{F}| \cdot d \end{aligned} \quad (2.38)$$



În relația (2.38),  $d$  se numește *brațul cuplului* și reprezintă distanța dintre dreptele suport ale forței  $\vec{F}$ , iar  $\alpha$  reprezintă unghiul dintre dreptele suport ale vectorilor  $\vec{AB}$  și  $\vec{F}$ .

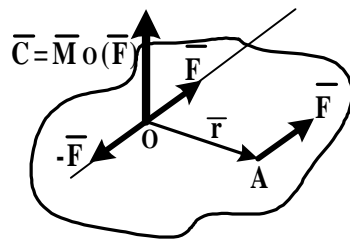
### 2.3.5. Reducerea forțelor

#### 2.3.5.1. Sisteme echivalente de forțe

Se consideră o forță  $\vec{F}$  aplicată într-un punct  $A$  al unui solid rigid. (Figura 2.12). A reduce forța  $\vec{F}$  în punctul  $O$  înseamnă a introduce în  $O$  un *sistem echivalent* cu forța  $\vec{F}$  care să aibă același efect mecanic asupra solidului rigid.

#### Definiția 2.19:

Două sisteme de forțe se numesc *echivalente* dacă pot rezulta unul din celălalt printr-o succesiune de operații elementare de echivalență.



**Fig. 2.12.**

- alunecarea unei forțe pe dreapta sa suport;
- descompunerea unei forțe în componentele sale pe axe concurente;
- introducerea în / eliminarea din sistem a forțelor egale în modul și de sens contrar;
- înlocuirea forțelor concurente cu rezultanta lor.

Sistemele echivalente se obțin prin aplicarea *operațiilor elementare de echivalență*:

#### 2.3.5.2. Torsor de reducere

Aplicarea (Figura 2.12) în punctul  $O$  a două forțe de sensuri opuse, egale în modul cu forța  $\vec{F}$  care acționează în punctul  $A$  și având aceeași direcție cu aceasta, nu modifică cu nimic efectul mecanic asupra solidului rigid. Forța  $\vec{F}$  aplicată în

punctul A și forța  $-\bar{F}$  aplicată în punctul O, formează un cuplu de forțe, de moment

$$\bar{C} = \bar{M}_O(\bar{F}) = \bar{r} \times \bar{F} \quad (2.39)$$

În consecință, asupra solidului rigid, în punctul O acționează forța  $\bar{F}$  și momentul  $\bar{M}_O(\bar{F})$ , al căror efect mecanic este echivalent cu cel al forței  $\bar{F}$  aplicată în punctul A.

Forța  $\bar{F}$  și momentul  $\bar{M}_O(\bar{F})$  se numesc *elemente de reducere* în punctul O sau *torsorul de reducere* al forței  $\bar{F}$  aplicată în punctul A, și se notează

$$\tau_O(\bar{F}, \bar{r} \times \bar{F}) \quad (2.40)$$

Pentru un sistem de forțe  $\bar{F}_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ , aplicate în punctele  $A_i$ ,  $i = \overline{1, n}$  și care au, respectiv, vectorii de poziție  $\bar{r}_i$ ,  $i = \overline{1, n}$  în raport cu punctul O, fiecare forță  $\bar{F}_i$  aplicată în punctul  $A_i$ , se înlocuiește cu o forță  $\bar{F}_i$  și un moment  $\bar{M}_i(\bar{F}_i) = \bar{r}_i \times \bar{F}_i$ , aplicate în punctul O. Sistemul forțelor  $\bar{F}_i$  concurente în punctul O se înlocuiește cu un vector rezultant  $\bar{R} = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i$  și, analog, momentele  $\bar{M}_i(\bar{F}_i) = \bar{r}_i \times \bar{F}_i$  se înlocuiesc cu un vector moment rezultant,  $\bar{M}_O = \sum_{i=1}^n \bar{M}_i(\bar{F}_i)$ .

În concluzie, torsorul de reducere al sistemului de forțe  $\bar{F}_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ , se scrie

$$\tau_O = (\bar{R}, \bar{M}_O) = \left( \sum_{i=1}^n \bar{F}_i, \sum_{i=1}^n \bar{r}_i \times \bar{F}_i \right) \quad (2.41)$$

În practică, se pune de foarte multe ori problema înlocuirii acțiunii unui sistem de forțe care acționează asupra unui solid rigid, cu acțiunea altui sistem de forțe, care diferă, în general, de primul atât prin numărul de forțe aplicate cât și prin modulul, direcția și sensul lor, dar care să aibă același efect mecanic asupra solidului rigid.

Acest lucru se realizează, așa cum s-a arătat anterior, cu ajutorul operațiilor elementare de echivalență.

**Teorema de echivalență  
a două sisteme de vectori alunecători:**

*Două sisteme de forțe sunt echivalente dacă au, într-un punct, aceeași forță rezultantă și același moment resultant, sau, cu alte cuvinte, dacă au același tursor de reducere în punctul considerat.*

Torsorul de reducere se bucură de următoarele proprietăți:

- la schimbarea punctului de reducere, forța rezultantă  $\bar{R}$ , obținută prin construirea poligonului forțelor, rămâne neschimbată, fiind un *invariant* în raport cu punctul de reducere;
- la schimbarea punctului de reducere, momentul resultant se modifică corespunzător relației

$$\begin{aligned}\bar{M}_{O'} &= \bar{r} \times \bar{R} = (\overline{O'O} + \bar{r}) \times \bar{R} = \\ &= \overline{O'O} \times \bar{R} + \bar{r} \times \bar{R} = \bar{M}_O + \overline{O'O} \times \bar{R}\end{aligned}\quad (2.42)$$

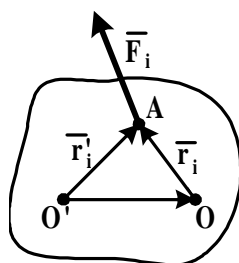


Fig. 2.13.

Astfel, într-un punct  $O'$ , al solidului rigid, (Figura 2.13), tursorul de reducere al sistemului de forțe  $\bar{F}_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ , se scrie

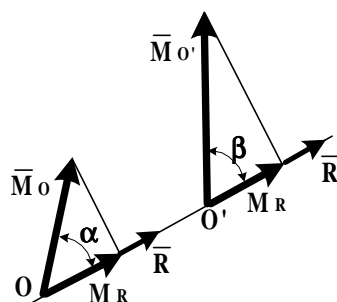
$$\tau_o = (\bar{R}, \bar{M}'_o) = \left( \sum_{i=1}^n \bar{F}_i, \bar{M}_o + \overline{O'O} \times \bar{R} \right) \quad (2.43)$$

➤ produsul scalar dintre forța rezultantă  $\bar{R}$  și momentul rezultat  $\bar{M}_o$  este o mărime constantă, fiind un *invariant* în raport cu punctul de reducere;

Într-adevăr, înmulțind scalar cu  $\bar{R}$ , relația (2.42) devine:

$$\bar{R} \cdot \bar{M}_{o'} = \bar{R} \cdot \bar{M}_o - \bar{R} \cdot (\overline{OO'} \times \bar{R}) = \bar{R} \cdot \bar{M}_o, \quad (2.44)$$

produsul mixt  $\bar{R} \cdot (\overline{OO'} \times \bar{R})$  fiind nul.



Relația (2.44) se mai scrie, conform celor prezentate în Figura 2.14,

Fig. 2.14.

$$\bar{R} \cdot \bar{M}_{o'} = |\bar{R}| \cdot |\bar{M}_{o'}| \cos \beta = |\bar{R}| \text{pr}_{\bar{R}} \bar{M}_{o'}$$

$$\bar{R} \cdot \bar{M}_o = |\bar{R}| \cdot |\bar{M}_o| \cos \alpha = |\bar{R}| \text{pr}_{\bar{R}} \bar{M}_o$$

deci,

$$\text{pr}_{\bar{R}} \bar{M}_{o'} = \text{pr}_{\bar{R}} \bar{M}_o = M_R = \text{const.}$$

adică, proiecția momentului rezultat pe direcția forței rezultante este un *invariant* în raport cu punctul de reducere.

Ținând cont de expresiile analitice ale vectorilor  $\bar{R} = R_x \bar{i} + R_y \bar{j} + R_z \bar{k}$  și  $\bar{M}_o = M_x \bar{i} + M_y \bar{j} + M_z \bar{k}$ , relația (2.44) se scrie

$$\bar{R} \cdot \bar{M}_o = R_x M_x + R_y M_y + R_z M_z = \text{constant} \quad (2.45)$$

și se numește *trinom invariant* sau scalarul tursorului sistemului de forțe dat.

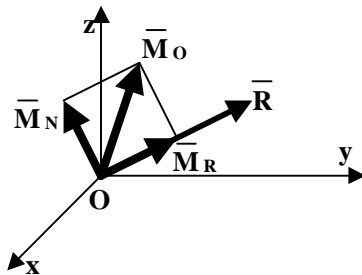
### 2.3.5.3. Torsor de reducere minimal. Axa centrală

Considerând un sistem oarecare de forțe acționând asupra unui solid rigid, se pune întrebarea care este valoarea minimă a tursorului sistemului de forțe dat și în care puncte de reducere se obține această valoare.

Așa cum rezultă din una dintre proprietățile tursorului de reducere, acesta se modifică la schimbarea punctului de reducere, ca o consecință a modificării momentului rezultat  $\bar{M}_O$ .

Este posibil să se descompună momentul rezultat  $\bar{M}_O$  în două componente  $\bar{M}_R$  după direcția rezultantei  $\bar{R}$  și  $\bar{M}_N$  într-un plan normal pe direcția rezultantei  $\bar{R}$ . (Figura 2.15)

$$\bar{M}_O = \bar{M}_R + \bar{M}_N \quad (2.46)$$



**Fig. 2.15.**

funcție de punctul de reducere, poate lua orice valoare și orice poziție în planul normal pe direcția rezultantei  $\bar{R}$ .

Cum componenta  $\bar{M}_R$  este invariantă, rezultă că modificările momentului rezultat  $\bar{M}_O$  și implicit ale tursorului de reducere, sunt determinate de componenta  $\bar{M}_N$  care, în

Se demonstrează că există puncte în care componenta  $\bar{M}_N$  este nulă.

În consecință, valoarea minimă a momentului rezultat  $\overline{M}_O$  este componenta  $\overline{M}_R$  a acestuia și se realizează în punctele în care componenta  $\overline{M}_N$  se anulează.

Mărimea momentului minim este dată de relația

$$M_{\min} = |\overline{M}_R| = \frac{\overline{R} \cdot \overline{M}_O}{|\overline{R}|} = \frac{R_x M_x + R_y M_y + R_z M_z}{\sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}} \quad (2.47)$$

S-a arătat în paragrafele precedente că momentul rezultat variază când se schimbă polul. Se pune problema determinării valorii minime a modului acestui vector. Notând cu  $M_x, M_y, M_z$  proiecțiile vectorului  $\overline{M}_O$ , cu  $R_x, R_y, R_z$  proiecțiile vectorului  $\overline{R}_O$  și cu  $x, y, z$  coordonatele punctului P în care modulul momentului rezultat este minim, expresia  $\overline{M}_P$  a acestuia se scrie:

$$\overline{M}_P = \overline{M}_O + \overline{PO} \times \overline{R} = M_x \bar{i} + M_y \bar{j} + M_z \bar{k} + \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -x & -y & -z \\ R_x & R_y & R_z \end{vmatrix}$$

sau

$$\overline{M}_P = (M_x - yR_z + zR_y) \bar{i} + (M_y - zR_x + xR_z) \bar{j} + (M_z - xR_y + yR_x) \bar{k}$$

iar

$$|\overline{M}_P|^2 = (M_x - yR_z + zR_y)^2 + (M_y - zR_x + xR_z)^2 + (M_z - xR_y + yR_x)^2 = f(x, y, z)$$

Pentru a calcula minimul funcției  $f(x, y, z)$  se pun condițiile:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

Rezultă

$$\begin{aligned} 2(M_y - zR_x + xR_z)R_z - 2(M_z - xR_y + yR_x)R_y &= 0 \\ 2(M_z - xR_y + yR_x)R_x - 2(M_x - yR_z + zR_y)R_z &= 0 \\ 2(M_x - yR_z + zR_y)R_y - 2(M_y - zR_x + xR_z)R_x &= 0 \end{aligned}$$

Este ușor de verificat că ecuațiile de mai sus nu sunt independente. Într-adevăr, dacă se multiplică prima ecuație cu  $R_x$ , a doua cu  $R_y$  și a treia cu  $R_z$  și se adună, se obține  $0 \equiv 0$ .

Rezultă că numai două dintre aceste ecuații sunt independente.

Împărțind prima relație cu  $2R_yR_z$ , a doua cu  $2R_zR_x$  și a treia cu  $2R_xR_y$ , aceste ecuații pot fi puse sub forma a trei rapoarte egale, ceea ce conduce la obținerea relației

$$\frac{M_x - yR_z + zR_y}{R_x} = \frac{M_y - zR_x + xR_z}{R_y} = \frac{M_z - xR_y + yR_x}{R_z} \quad (2.48)$$

**Definiția 2.21:**

Locul geometric al punctelor în care, efectuând reducerea, torsorul sistemului de forțe are valoarea minimă, este o dreaptă, obținută prin intersecția a două plane, numită *axa centrală* a sistemului de forțe considerat.

**Observația 2.5:**

*Torsorul de reducere minimal* este deci, ansamblul format din vectorii (având ca dreaptă suport axa centrală):

$\bar{R}$  - vectorul forță rezultantă a sistemului de forțe;

$\bar{M}_R$  - momentul rezultat minim – și se notează

$$\tau_{O \min} = (\bar{R}, \bar{M}_R) \quad (2.49)$$

**2.3.5.4. Cazurile de reducere ale sistemelor de forțe oarecare**

Când un sistem de forțe oarecare se reduce într-un punct

O, se pot întâlni următoarele *cazuri de reducere*:

1.  $\bar{\mathbf{R}} = 0$ ;  $\bar{\mathbf{M}}_O = 0$ , ceea ce înseamnă că sistemul de forțe dat este echivalent cu zero, deci torsorul de reducere este nul.

2.  $\bar{\mathbf{R}} \neq 0$ ;  $\bar{\mathbf{M}}_O = 0$ , ceea ce înseamnă că sistemul de forțe dat este echivalent cu o rezultantă unică,  $\bar{\mathbf{R}} = \sum_{i=1}^n \bar{\mathbf{F}}_i$ , al cărei suport trece prin punctul de reducere, O.

Este valabilă următoarea teoremă:

**Teorema momentelor (Teorema lui Varignon):** pentru un sistem de forțe care se reduce la o rezultantă unică, momentul rezultantei în raport cu un punct este egal cu suma vectorială a momentelor forțelor componente calculate în raport cu același punct.

$$\bar{\mathbf{M}}_O = \bar{\mathbf{M}}_O(\bar{\mathbf{R}}) = \sum_{i=1}^n \bar{\mathbf{M}}_O(\bar{\mathbf{F}}_i) \quad (2.50)$$

Pentru un sistem de forțe care se reduce la o rezultantă unică, momentul rezultantei în raport cu o axă este egal cu suma algebrică a momentelor forțelor componente calculate în raport cu acea axă.

$$M_\Delta = M_\Delta(\bar{\mathbf{R}}) = \sum_{i=1}^n M_\Delta(\bar{\mathbf{F}}_i) \quad (2.51)$$

3.  $\bar{\mathbf{R}} = 0$ ;  $\bar{\mathbf{M}}_O \neq 0$ , ceea ce înseamnă că sistemul de forțe dat este echivalent cu un cuplu ale cărui forțe,  $\bar{\mathbf{F}}$ , au sensurile alese astfel încât să se respecte regula burghiului drept și sunt situate într-un plan perpendicular pe direcția momentului  $\bar{\mathbf{M}}_O$ , la distanța  $d$  care respectă relația  $|\bar{\mathbf{F}}| \cdot d = \bar{\mathbf{M}}_O$ .



## NOȚIUNI ELEMENTARE DE CALCUL VECTORIAL

4.  $\bar{\mathbf{R}} \neq 0$ ;  $\bar{\mathbf{M}}_O \neq 0$ , caz în care se pot distinge două situații, după cum trinomial invariant  $\bar{\mathbf{R}} \cdot \bar{\mathbf{M}}_O$  este nul sau nu:

4.a.  $\bar{\mathbf{R}} \cdot \bar{\mathbf{M}}_O = 0$ , (cei doi vectori sunt ortogonali) ceea ce înseamnă că sistemul de forțe dat este echivalent cu o rezultantă unică  $\bar{\mathbf{R}} = \sum_{i=1}^n \bar{\mathbf{F}}_i$ , aflată pe axa centrală, momentul minim fiind egal cu zero.

4.b.  $\bar{\mathbf{R}} \cdot \bar{\mathbf{M}}_O \neq 0$ , (cei doi vectori fac între ei un unghi  $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ ) ceea ce înseamnă că sistemul de forțe dat este echivalent cu o rezultantă  $\bar{\mathbf{R}} = \sum_{i=1}^n \bar{\mathbf{F}}_i$ , aflată pe axa centrală, și un cuplu acționând într-un plan normal pe axa centrală al cărui moment este  $\bar{\mathbf{M}}_R$ .

### 2.3.5.5. Cazurile de reducere ale sistemelor de forțe particulare

Reducerea sistemelor de forțe oarecare, prezentată în paragraful anterior, are elemente specifice și este mult mai simplă în cazul sistemelor de forțe particulare, așa cum se va vedea în continuare.

#### A. Cazul forțelor concurente

##### **Definiția 2.22:**

O mulțime de forțe, ale căror suporturi trec prin același punct O, formează un *sistem de forțe concurente*.

Ca vectori alunecători, toate forțele pot aluneca pe dreptele lor suport, astfel ca punctele lor de aplicație să fie situate în O.

Forța rezultantă este  $\bar{\mathbf{R}} = \sum_{i=1}^n \bar{\mathbf{F}}_i$ . Momentele acestor forțe în

raport cu punctul O sunt nule, deoarece vectorii de poziție  $\vec{r}_i = 0$  și deci, momentul rezultat  $\vec{M}_O = \sum_{i=1}^n \vec{M}_O(\vec{F}_i) = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i$  este, de asemenea, nul.

În concluzie, un sistem de forțe concurente este echivalent cu o rezultantă unică  $\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$  al cărei suport trece prin punctul O, sau este echivalent cu zero dacă  $\vec{R} = 0$ .

### B. Cazul forțelor coplanare

#### Definiția 2.23:

O mulțime de forțe, ale căror suporturi sunt, toate, conținute într-un același plan, [P], formează un *sistem de forțe coplanare*.

Forța rezultantă  $\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$  se află în planul [P] al forțelor,

iar momentul rezultat  $\vec{M}_O = \sum_{i=1}^n \vec{M}_O(\vec{F}_i) = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i$  este normal pe acest plan.

Dacă se consideră planul Oxy ca plan al forțelor, iar componentele vectorilor de poziție și ale forțelor sunt  $\vec{r}_i = x_i \vec{i} + y_i \vec{j}$  respectiv  $\vec{F}_i = F_{xi} \vec{i} + F_{yi} \vec{j}$  atunci, elementele tursorului de reducere au expresiile analitice

$$\tau_O \begin{cases} \vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \left( \sum_{i=1}^n F_{xi} \right) \vec{i} + \left( \sum_{i=1}^n F_{yi} \right) \vec{j} = R_x \vec{i} + R_y \vec{j} \\ \vec{M}_O = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \sum_{i=1}^n (x_i F_{yi} - y_i F_{xi}) \vec{k} = M_{Oz} \vec{k} \end{cases} \quad (2.52)$$

Se observă că trinomul invariant  $\vec{R} \cdot \vec{M}_O = 0$ , ceea ce înseamnă că cei doi vectori, vectorul rezultat  $\vec{R}$  și momentul rezultat  $\vec{M}_O$ , sunt întotdeauna ortogonali.

În cazul cel mai general, un sistem de forțe coplanare este echivalent cu o rezultantă unică, aflată pe axa centrală care, în acest caz, se numește suportul rezultantei.

Din relația (2.52), rezultă

$$M_{Oz} \vec{k} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & 0 \\ R_x & R_y & 0 \end{vmatrix} \text{ sau } R_y x - R_x y = M_{Oz} \quad (2.53)$$

adică, chiar ecuația suportului rezultantei.

#### **Observația 2.6:**

La reducerea sistemelor de forțe coplanare, sunt posibile și următoarele două situații:

➤  $\vec{R} = 0; \vec{M}_O = 0$ , cazul sistemului de forțe echivalent cu zero;

➤  $\vec{R} = 0; \vec{M}_O \neq 0$ , cazul sistemului de forțe echivalent cu un cuplu ale cărui forțe sunt conținute în planul forțelor date și al cărui moment este  $M_O$ .

#### **C. Cazul forțelor paralele**

##### **Definiția 2.24:**

O mulțime de forțe ale căror suporturi sunt drepte paralele între ele, formează un *sistem de forțe paralele*.

Forța rezultantă  $\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$  are suportul paralel cu cel al sistemului de forțe dat, iar momentul rezultat, calculat în raport cu punctul de reducere O,  $\vec{M}_O = \sum_{i=1}^n \vec{M}_O(\vec{F}_i) = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i$ , se află

într-un plan perpendicular pe suportul sistemului de forțe dat, momentul fiecărei forțe fiind perpendicular pe dreapta sa suport.

Dacă se consideră că versorul direcției forțelor paralele este  $\bar{u}$ , atunci, elementele torsorului de reducere în raport cu punctul O, au expresiile analitice

$$\tau_O \begin{cases} \bar{R} = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i = \left( \sum_{i=1}^n F_i \right) \bar{u} \\ \bar{M}_O = \sum_{i=1}^n \bar{r}_i \times \bar{F}_i = \sum_{i=1}^n \bar{r}_i \times F_i \bar{u} = \left( \sum_{i=1}^n F_i \bar{r}_i \right) \times \bar{u} \end{cases} \quad (2.54)$$

Sistemul de forțe paralele, în caz general, este echivalent cu o forță unică, aflată pe axa centrală, a cărei direcție este paralelă cu suportul sistemului de forțe dat. Din teorema lui Varignon, rezultă

$$\left( \sum_{i=1}^n F_i \bar{r}_i \right) \times \bar{u} = \bar{r} \times \left( \sum_{i=1}^n F_i \right) \bar{u}$$

sau

$$\left( \sum_{i=1}^n F_i \bar{r}_i - \bar{r} \sum_{i=1}^n F_i \right) \times \bar{u} = 0 \quad (2.55)$$

Produsul vectorial fiind nul, ecuația vectorială (2.55) este echivalentă cu ecuația  $\sum_{i=1}^n F_i \bar{r}_i - \bar{r} \sum_{i=1}^n F_i = \beta \bar{u}$ , vectorii fiind, în aceste condiții, coliniari. Se poate scrie

$$\bar{r} = \frac{\sum_{i=1}^n F_i \bar{r}_i}{\sum_{i=1}^n F_i} - \frac{\beta}{\sum_{i=1}^n F_i} \bar{u} = \bar{r}_C + \alpha \bar{u} \quad (2.56)$$

Relația (2.56) - în care,  $\alpha$  și  $\beta$  sunt parametri,  $\alpha = \frac{-\beta}{\sum_{i=1}^n F_i}$

## NOȚIUNI ELEMENTARE DE CALCUL VECTORIAL

- este ecuația vectorială a unei drepte care trece prin punctul C, numit *centru al forțelor paralele* și care este caracterizat de vectorul de poziție

$$\vec{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^n F_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n F_i} \quad (2.57)$$

Se demonstrează următoarele proprietăți ale centrului forțelor paralele:

- centrul forțelor paralele nu-și schimbă poziția dacă direcția tuturor forțelor se rotește cu același unghi;
- centrul forțelor paralele nu-și schimbă poziția dacă se multiplică mărimea tuturor forțelor cu același scalar;
- poziția centrului forțelor paralele nu depinde de originea sistemului de axe de coordonate.

### Observația 2.7:

La reducerea sistemelor de forțe paralele, sunt posibile și următoarele două situații:

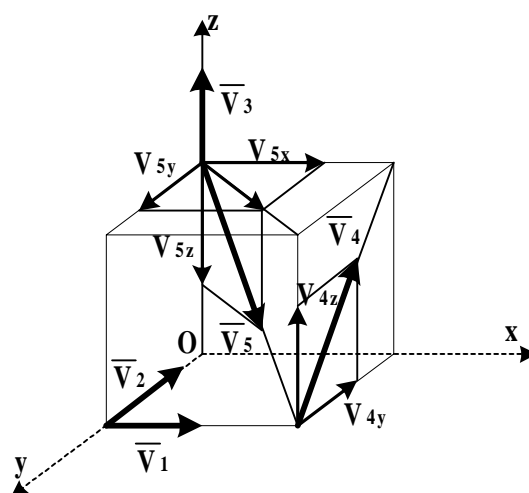
- $\vec{R} = 0; \vec{M}_O = 0$ , cazul sistemului echivalent cu zero;
- $\vec{R} = 0; \vec{M}_O \neq 0$ , cazul sistemului echivalent cu un cuplu ale cărui forțe sunt conținute în planul forțelor date și al cărui moment este  $M_O(\vec{R})$ .

## APLICAȚII

### 1. Enunț:

Asupra unui cub de latură a, acționează vectorii din figură. Să se proiecteze acești vectori pe axele unui sistem cartezian triortogonal, Oxyz, știind că:

$$|\vec{V}_1| = |\vec{V}_2| = |\vec{V}_3| = |\vec{V}_4| = |\vec{V}_5| = p$$



**Rezolvare:**

Pentru rezolvarea problemei, se ține seama de expresia unui vector scrisă în raport cu sistemul cartezian triortogonal

$$\bar{v} = v_x \bar{i} + v_y \bar{j} + v_z \bar{k}$$

în care,  $v_x$ ,  $v_y$ ,  $v_z$  reprezintă proiecțiile vectorului pe axele sistemului de coordonate.

Proiecțiile vectorilor sunt prezentate în tabelul următor:

vectorul	proiecția pe axa Ox	proiecția pe axa Oy	proiecția pe axa Oz
$ \bar{V}_1 $	p	0	0
$ \bar{V}_2 $	0	-p	0
$ \bar{V}_3 $	0	0	-p
$ \bar{V}_4 $	0	$-p\sqrt{2}$	$-p\sqrt{2}$
$ \bar{V}_5 $	$\frac{p}{\sqrt{3}}$	$\frac{p}{\sqrt{3}}$	$\frac{p}{\sqrt{3}}$

**2. Enunț:**

Se dau vectorii:

$$\bar{v}_1 = 2\bar{i} + 3\bar{j} + 4\bar{k}; \quad \bar{v}_2 = \bar{i} - 4\bar{j} - 2\bar{k}; \quad \bar{v}_3 = 5\bar{i} + \bar{j} + 3\bar{k}$$

Se cere să se calculeze:

$$\begin{aligned} &\bar{v}_1 + \bar{v}_2; \quad \bar{v}_2 \cdot \bar{v}_3; \\ &\bar{v}_1 \times \bar{v}_3; \quad \bar{v}_1 (\bar{v}_2 \times \bar{v}_3) \end{aligned}$$

**Rezolvare:**

În sistemul cartezian triortogonal, suma a doi vectori  $\bar{a} = a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k}$  și  $\bar{b} = b_x \bar{i} + b_y \bar{j} + b_z \bar{k}$  este un vector,  $\bar{c} = c_x \bar{i} + c_y \bar{j} + c_z \bar{k}$ , care este dat de relația

$$\bar{c} = \bar{a} + \bar{b} = (a_x + b_x) \bar{i} + (a_y + b_y) \bar{j} + (a_z + b_z) \bar{k}$$

Se obține:

$$\bar{v}_1 + \bar{v}_2 = (2\bar{i} + 3\bar{j} + 4\bar{k}) + (\bar{i} - 4\bar{j} - 2\bar{k}) = 3\bar{i} - \bar{j} + 2\bar{k}$$

În sistemul cartezian triortogonal, produsul scalar a doi vectori  $\bar{a} = a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k}$  și  $\bar{b} = b_x \bar{i} + b_y \bar{j} + b_z \bar{k}$  este un scalar

$$m = \bar{a} \cdot \bar{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

Se obține:

$$\bar{v}_2 \cdot \bar{v}_3 = (\bar{i} - 4\bar{j} - 2\bar{k}) \cdot (5\bar{i} + \bar{j} + 3\bar{k}) = 1 \cdot 5 - 4 \cdot 1 - 2 \cdot 3 = -5$$

În sistemul cartezian triortogonal, produsul vectorial a doi vectori  $\bar{a} = a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k}$  și  $\bar{b} = b_x \bar{i} + b_y \bar{j} + b_z \bar{k}$  este un vector

$$\begin{aligned} \bar{v} = \bar{a} \times \bar{b} &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \\ &= (a_y b_z - a_z b_y) \bar{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \bar{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \bar{k} \end{aligned}$$

Se obține:

$$\begin{aligned}\bar{v}_1 \times \bar{v}_3 &= (2\bar{i} + 3\bar{j} + 4\bar{k}) \times (5\bar{i} + \bar{j} + 3\bar{k}) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \\ &= 5\bar{i} + 14\bar{j} - 13\bar{k}\end{aligned}$$

În sistemul cartezian triortogonal, produsul mixt al vectorilor  $\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}$ ,  $\bar{b} = b_x\bar{i} + b_y\bar{j} + b_z\bar{k}$  și

$\bar{c} = c_x\bar{i} + c_y\bar{j} + c_z\bar{k}$  este scalarul

$$\begin{aligned}m &= \bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \\ &= (b_y c_z - b_z c_y) a_x - (b_x c_z - b_z c_x) a_y + (b_x c_y - b_y c_x) a_z\end{aligned}$$

Se obține:

$$\begin{aligned}\bar{v}_1 \cdot (\bar{v}_2 \times \bar{v}_3) &= (2\bar{i} + 3\bar{j} + 4\bar{k}) \cdot \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & -4 & -2 \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \\ &= (2\bar{i} + 3\bar{j} + 4\bar{k}) \cdot (-10\bar{i} - 13\bar{j} + 21\bar{k}) = -2 \cdot 10 - 3 \cdot 13 + 4 \cdot 21 = 25\end{aligned}$$

### 3. Enunț:

Asupra unui cilindru acționează sistemul de forțe dirijate ca în figură.

Se cunosc mărimile exprimate în N:

$$\begin{aligned}|\bar{F}_1| &= f\sqrt{17 + 4\sqrt{2}} \\ |\bar{F}_2| &= |\bar{F}_3| = |\bar{F}_4| = f\sqrt{2}\end{aligned}$$

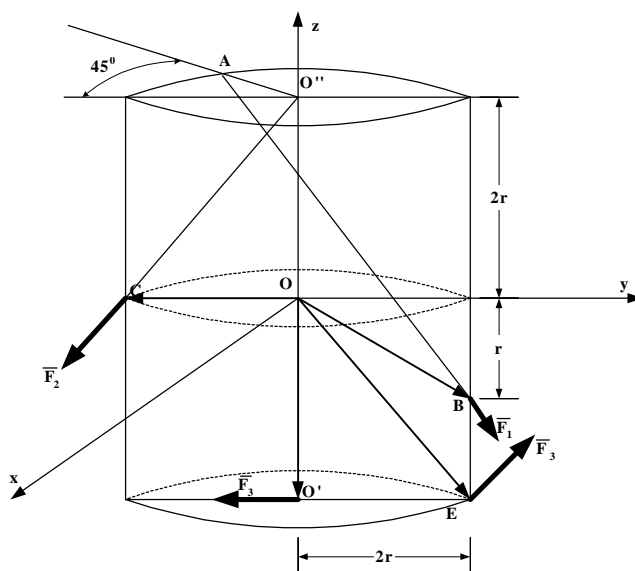
cu  $f = \text{const.}$ , forțele  $\bar{F}_3$  și  $\bar{F}_4$  fiind paralele cu axele  $Ox$  respectiv  $Oy$ .



## NOȚIUNI ELEMENTARE DE CALCUL VECTORIAL

De asemenea, se cunosc dimensiunile indicate pe desen.

Se cere să se reducă sistemul de forțe în raport cu punctul O, precizând cazul de reducere și să se determine ecuația axei centrale a sistemului de forțe considerat.



### Rezolvare:

Torsorul de reducere a sistemului de forțe în raport cu punctul O se scrie

$$\tau_O = (\bar{R}, \bar{M}_O) = \left( \sum_{i=1}^4 \bar{F}_i, \sum_{i=1}^4 \bar{r}_i \times \bar{F}_i \right)$$

Corespunzător figurii prezentate, se scriu expresiile analitice ale forțelor respectiv momentelor acestor forțe în raport cu punctul de reducere

$$\bar{F}_1 = f\sqrt{2} \cdot \bar{i} + f(2 + \sqrt{2})\bar{j} - 3f \cdot \bar{k}$$

$$\bar{F}_2 = -2f \cdot \bar{j} - 2f \cdot \bar{k}$$

$$\bar{F}_3 = -f\sqrt{2} \cdot \bar{i}$$

$$\bar{F}_4 = -f\sqrt{2} \cdot \bar{j}$$

Se obține

$$\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 + \bar{F}_4 = -5f \cdot \bar{k}$$

$$\begin{aligned} \bar{M}_O &= (\overline{OB} \times \bar{F}_1) + (\overline{OC} \times \bar{F}_2) + (\overline{OE} \times \bar{F}_3) + (\overline{OO'} \times \bar{F}_4) = \\ &= [(-4 + \sqrt{2})fr \cdot \bar{i} - \sqrt{2}fr \cdot \bar{j} - 2rf\sqrt{2} \cdot \bar{k}] + 4rf \cdot \bar{i} + \\ &+ [2rf\sqrt{2}(\bar{j} + \bar{k})] - 2rf\sqrt{2} \cdot \bar{i} = \\ &= -rf\sqrt{2} \cdot \bar{i} + rf\sqrt{2} \cdot \bar{j} \end{aligned}$$

În plus, produsul

$$\bar{R} \cdot \bar{M}_O = -5f \cdot \bar{k}(-rf\sqrt{2} \cdot \bar{i} + rf\sqrt{2} \cdot \bar{j}) = 0,$$

deci sistemul de forțe dat este echivalent cu o forță unică al cărei suport nu trece prin punctul de reducere, având în vedere că  $\bar{M}_O \neq 0$ .

Ecuția axei centrale este dată de relațiile:

$$\frac{M_x - yR_z + zR_y}{R_x} = \frac{M_y - zR_x + xR_z}{R_y} = \frac{M_z - xR_y + yR_x}{R_z}$$

Prin înlocuirea expresiilor pentru proiecțiile pe axele sistemului de referință a rezultantei  $\bar{R}$  și a momentului acesteia în raport cu punctul de reducere  $\bar{M}_O(\bar{R})$ , se ajunge la concluzia că axa centrală este o dreaptă paralelă cu axa Oz care trece prin punctul

$$P\left(-\frac{r\sqrt{2}}{5}, \frac{r\sqrt{2}}{5}, 0\right).$$

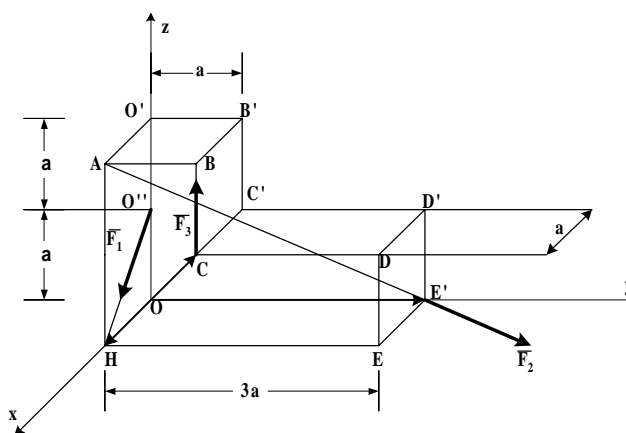
#### 4. Enunț

Asupra corpului din figură acționează sistemul de forțe pentru care se cunosc mărimile exprimate în N

## NOȚIUNI ELEMENTARE DE CALCUL VECTORIAL

$$|\vec{F}_1| = f\sqrt{2}, \quad |\vec{F}_2| = f\sqrt{14}, \quad |\vec{F}_3| = 3f \text{ și } f = \text{const.} > 0.$$

De asemenea, se cunosc dimensiunile indicate pe figură.



Se cere să se reducă sistemul de forțe în raport cu punctul O, precizând cazul de reducere și să se determine ecuația axei centrale a sistemului de forțe considerat.

### Rezolvare:

Torsorul de reducere a sistemului de forțe în raport cu punctul O se scrie

$$\tau_o = (\vec{R}, \vec{M}_o) = \left( \sum_{i=1}^4 \vec{F}_i, \sum_{i=1}^4 \vec{r}_i \times \vec{F}_i \right)$$

Corespunzător figurii prezentate, se scriu expresiile analitice ale forțelor respectiv momentelor acestor forțe în raport cu punctul de reducere

$$\vec{F}_1 = f \cdot \vec{i} - f \cdot \vec{k}$$

$$\vec{F}_2 = -f \cdot \vec{i} + 3f \cdot \vec{j} - 2f \cdot \vec{k}$$

$$\vec{F}_3 = 3f \cdot \vec{k}$$

Se obține

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 3f \cdot \vec{j}$$

$$\begin{aligned}\overline{M}_O &= (\overline{OH} \times \overline{F}_1) + (\overline{OE'} \times \overline{F}_2) + (\overline{OC} \times \overline{F}_3) = \\ &= af \cdot \bar{j} + af(-6\bar{i} + 3\bar{k}) + 3af(\bar{i} - \bar{j}) = af(-3\bar{i} - 2\bar{j} + 3\bar{k})\end{aligned}$$

În plus, produsul

$$\overline{R} \cdot \overline{M}_O(\overline{R}) = 3f \cdot \bar{j} \cdot af(-3\bar{i} - 2\bar{j} + 3\bar{k}) \neq 0,$$

deci sistemul de forțe dat este echivalent cu un torsor propriu-zis.

Ecuția axei centrale este dată de relațiile:

$$\frac{M_x - yR_z + zR_y}{R_x} = \frac{M_y - zR_x + xR_z}{R_y} = \frac{M_z - xR_y + yR_x}{R_z} =$$

Prin înlocuirea expresiilor pentru proiecțiile pe axele sistemului de referință a rezultantei  $\overline{R}$  și a momentului acesteia în raport cu punctul de reducere  $\overline{M}_O$ , se ajunge la concluzia că axa centrală este o dreaptă paralelă cu axa  $Oy$  care trece prin punctul

$$P(a, 0, a).$$

### 5. Enunț

În figură este reprezentat sistemul de acționare pentru o masă vibrantă, format dintr-un excentric solidar cu o roată dințată și un tachet, care se sprijină cu talpa sa, prin intermediul unor role, pe ghidaje verticale.

Asupra ansamblului tehnic prezentat, acționează forțele:

$$|\overline{P}| = 500 \text{ N};$$

$$|\overline{Q}| = 50 \text{ N};$$

$$|\overline{F}| = 3002\sqrt{2} \text{ N};$$

$$|\overline{F}_e| = -k_e e \sin \theta, \quad (k_e = 2000 \text{ N/m}; \quad e = 0,05 \text{ m});$$

$$|\overline{N}| = \mu(|\overline{P}| - k_e e \sin \theta), \quad (\mu = 0,05)$$

Cunoscând următoarele date constructive

### NOȚIUNI ELEMENTARE DE CALCUL VECTORIAL

$a = 0,04 \text{ m}$ ;  $\overline{OG} = 0,02 \text{ m}$ ;  $\overline{OE} = b_F = 0,07 \text{ m}$ ;

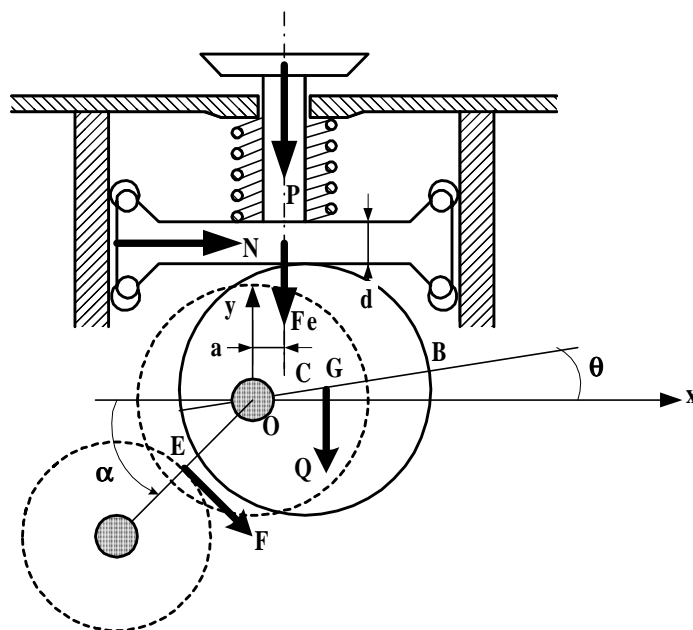
$\overline{OC} = 0,05 \text{ m}$ ;  $d = 0,02 \text{ m}$ ;  $\overline{CB} = R = 0,1 \text{ m}$ ;  $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ,

se cere să se reducă sistemul de forțe în raport cu punctul O, precizând cazul de reducere și să se determine ecuația axei centrale a sistemului de forțe considerat.

#### Rezolvare:

Torsorul de reducere a sistemului de forțe în raport cu punctul O se scrie

$$\tau_o = (\overline{R}, \overline{M}_o) = \left( \sum_{i=1}^4 \overline{F}_i, \sum_{i=1}^4 \overline{r}_i \times \overline{F}_i \right)$$



Corespunzător figurii prezentate, se scriu expresiile analitice ale forțelor respectiv momentelor acestor forțe în raport cu punctul de reducere

$$|\bar{P}| = -500\bar{j}; \quad \bar{M}_O(\bar{P}) = -20\bar{k}$$

$$|\bar{Q}| = -50\bar{j}; \quad \bar{M}_O(\bar{Q}) = -\cos \theta \bar{k}$$

$$|\bar{F}| = 300\bar{i} - 300\bar{j}; \quad \bar{M}_O(\bar{F}) = 21\sqrt{2}\bar{k}$$

$$|\bar{F}_e| = -100 \sin \theta \bar{j}; \quad \bar{M}_O(\bar{F}_e) = -4 \sin \theta \bar{k}$$

$$|\bar{N}| = (25 - 5 \sin \theta)\bar{i}; \quad \bar{M}_O(\bar{N}) = (0,25 \sin^2 \theta - 0,7 \sin \theta - 2,75)\bar{k}$$

Se obține torsorul de reducere în punctul O

$$\tau_o \begin{cases} \bar{R} = (325 - 5 \sin \theta)\bar{i} - (850 + 100 \sin \theta)\bar{j} \\ \bar{M}_O = (6,86 - \cos \theta - 4,7 \sin \theta + 0,25 \sin^2 \theta)\bar{k} \end{cases}$$

În plus, produsul

$$\bar{R} \cdot \bar{M}_O = 0,$$

deci sistemul de forțe dat este echivalent cu o rezultantă unică.

Ecuția axei centrale este dată de relațiile:

$$\frac{M_x - yR_z + zR_y}{R_x} = \frac{M_y - zR_x + xR_z}{R_y} = \frac{M_z - xR_y + zR_x}{R_z} =$$

Prin înlocuirea expresiilor pentru proiecțiile pe axele sistemului de referință a rezultantei  $\bar{R}$  și a momentului acesteia în raport cu punctul de reducere  $\bar{M}_O$ , se ajunge la ecuația scalară

$$\begin{aligned} (850 + 100 \sin \theta)x + (325 - 5 \sin \theta)y = \\ = -6,86 + \cos \theta + 4,7 \sin \theta - 0,25 \sin^2 \theta \end{aligned}$$

care este suportul rezultantei unice cu care este echivalent sistemul de forțe dat.

## CAPITOLUL 3

### NOȚIUNI DE GEOMETRIA MASELOR

#### 3.1. CENTRE DE MASĂ

##### 3.1.1. Greutatea. Centrul de greutate (de masă)

Așa cum se arată în Figura 3.1, toate particulele  $M_i$  având masele  $m_i$ ,  $i = \overline{1, n}$  și aparținând unui sistem de puncte materiale aflat la suprafața Pământului, sunt supuse acțiunii câmpului gravitațional terestru care se manifestă prin forța de atracție

$$\overline{G}_i = m_i \cdot \overline{g} \quad (3.1)$$

și care este numită *forță de greutate*.

Se observă că această forță depinde de masa particulei materiale,  $m_i$ , și de vectorul  $\overline{g}$  care este numit *accelerație gravitațională* și care, la fel cu oricare mărime vectorială, este definit de următoarele elemente:

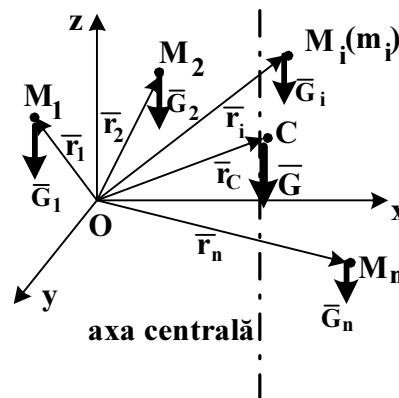


Fig. 3.1.

- modul – variabil, în funcție de poziția particulei materiale în raport cu suprafața Pământului, în calcule considerându-se valoarea de  $9,81 \text{ m/s}^2$ ;
- direcție – aproximativ direcția razei Pământului;
- sens – dirijat către centrul Pământului.

*Greutatea* sistemului de puncte materiale reprezentat în figura 3.1 este

$$\vec{G} = \vec{G}_1 + \vec{G}_2 + \dots + \vec{G}_n = \sum_{i=1}^n \vec{G}_i \quad (3.2)$$

Ținând seama de relația (3.1), greutatea sistemului se scrie

$$\vec{G} = \sum_{i=1}^n \vec{G}_i = \sum_{i=1}^n m_i \cdot \vec{g} = \vec{g} \sum_{i=1}^n m_i = M\vec{g} \quad (3.3)$$

în care s-a notat  $M = \sum_{i=1}^n m_i$ , masa totală a sistemului de puncte materiale considerat.

Pe un domeniu restrâns, situat la suprafața Pământului, câmpul gravitațional terestru se consideră constant, deci se poate neglija variația intensității și direcției vectorului accelerație gravitațională, greutatea ce acționează asupra particulelor materiale fiind considerate forțe paralele, dirijate după o direcție verticală și având sensul orientat în jos.

Sistemul acestor forțe paralele poate fi înlocuit cu o rezultantă unică, numită *greutate* a sistemului de puncte materiale și care este definită de următoarele elemente caracteristice unei mărimi vectoriale:

- punct de aplicație - este punctul C numit *centru de greutate* și care reprezintă centrul forțelor de greutate,  $\vec{G}_i$ , considerate paralele;
- modul – este dat de relația

$$G = \sum_{i=1}^n G_i = \sum_{i=1}^n m_i \cdot g = g \sum_{i=1}^n m_i = Mg;$$

- direcție – este dată de direcția axei centrale;
- sens – este orientat în jos.

Fiind centrul forțelor paralele de greutate, centrul de greutate, C, al sistemului de puncte materiale considerat este caracterizat de vectorul de poziție



$$\vec{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^n G_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n G_i} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i g \cdot \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i g} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{M} \quad (3.4)$$

relație care demonstrează că centrul de greutate al unui sistem de puncte materiale este un element geometric care depinde de modul de distribuire a maselor sistemului, ceea ce justifică și denumirea de *centru de masă*.

**Observația 3.1:**

Evident, centrul de greutate și centrul de masă sunt puncte confundate, diferența fiind dată de faptul că noțiunea de centru de masă este independentă de atracția universală.

Proiecțiile vectorului de poziție  $\vec{r}_C$  pe axele unui sistem cartezian triortogonal Oxyz, definesc coordonatele centrului de masă al sistemului de puncte materiale considerat

$$\begin{aligned} x_C &= \frac{\sum_{i=1}^N m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i x_i}{M}; \\ y_C &= \frac{\sum_{i=1}^N m_i y_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i y_i}{M}; \\ z_C &= \frac{\sum_{i=1}^N m_i z_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i z_i}{M} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Dacă în relațiile (3.4) și (3.5)  $n \rightarrow \infty$ , deci masele sistemului de puncte materiale sunt repartizate continuu în

spațiul ocupat de sistem, acesta devine un domeniu material continuu, (D), iar sumele din relațiile anterioare se transformă în integrale, astfel încât se poate scrie

$$\bar{r}_C = \frac{\int_{(D)} \bar{r} \cdot dm}{\int_{(D)} dm} \quad (3.6)$$

respectiv

$$x_C = \frac{\int_{(D)} x \cdot dm}{\int_{(D)} dm}; y_C = \frac{\int_{(D)} y \cdot dm}{\int_{(D)} dm}; z_C = \frac{\int_{(D)} z \cdot dm}{\int_{(D)} dm} \quad (3.7)$$

Pentru studiul centrului de masă al diferitelor domenii materiale, este necesar să se introducă noțiunea de densitate medie,  $\rho_{med} = \frac{\Delta m_i}{\Delta V_i}$ , prin trecere la limită,  $\Delta V_i \rightarrow 0$ , obținându-se densitatea

$$\rho = \frac{dm}{dV} \quad (3.8)$$

În cazul unui domeniu material cu masa repartizată tridimensional pe un volum  $V$  – cazul blocurilor sau corpurilor - este valabilă relația  $dm = \rho_v \cdot dv$ , în care,  $\rho_v$  [ $\text{kg}/\text{m}^3$ ] se numește *densitate volumetrică*.

În cazul unui domeniu material cu masa repartizată pe o suprafață de arie totală  $S$  – cazul plăcilor și membranelor - este valabilă relația  $dm = \rho_A \cdot dA$ , în care,  $\rho_A$  [ $\text{kg}/\text{m}^2$ ] se numește *densitate superficială*.

În cazul unui domeniu material cu masa repartizată pe o curbă de lungime totală  $L$  – cazul barelor și firelor - este valabilă relația  $dm = \rho_L \cdot dl$ , în care,  $\rho_L$  [kg/m] se numește *densitate liniară*.

În cazul domeniilor materiale omogene (realizate din același material și având aceeași secțiune transversală), densitatea se consideră constantă,  $\rho = \text{const.}$ , iar pentru celelalte situații, ea este variabilă  $\rho = \rho(x, y, z)$ .

Înlocuind corespunzător în relațiile (3.6) și (3.7) elementul de masă  $dm$ , după simplificări se obțin relațiile

- pentru corpuri materiale

$$\bar{r}_C = \frac{\int_{(v)} \bar{r} \cdot dv}{\int_{(v)} dv} \quad (3.9)$$

respectiv

$$x_C = \frac{\int_{(v)} x \cdot dv}{\int_{(v)} dv}; y_C = \frac{\int_{(v)} y \cdot dv}{\int_{(v)} dv}; z_C = \frac{\int_{(v)} z \cdot dv}{\int_{(v)} dv} \quad (3.10)$$

- pentru suprafețe materiale

$$\bar{r}_C = \frac{\int_{(s)} \bar{r} \cdot dA}{\int_{(s)} dA} \quad (3.11)$$

respectiv

$$x_C = \frac{\int_{(s)} x \cdot dA}{\int_{(s)} dA}; y_C = \frac{\int_{(s)} y \cdot dA}{\int_{(s)} dA}; z_C = \frac{\int_{(s)} z \cdot dA}{\int_{(s)} dA} \quad (3.12)$$

- pentru curbe materiale

$$\bar{\mathbf{r}}_C = \frac{\int_{(L)} \mathbf{r} \cdot d\mathbf{l}}{\int_{(L)} d\mathbf{l}} \quad (3.13)$$

respectiv

$$x_C = \frac{\int_{(L)} x \cdot d\mathbf{l}}{\int_{(L)} d\mathbf{l}}; y_C = \frac{\int_{(L)} y \cdot d\mathbf{l}}{\int_{(L)} d\mathbf{l}}; z_C = \frac{\int_{(L)} z \cdot d\mathbf{l}}{\int_{(L)} d\mathbf{l}} \quad (3.14)$$

### **3.1.2. Proprietățile centrelor de masă**

Se demonstrează următoarele proprietăți generale ale centrelor de masă:

1) poziția centrului de masă al unui sistem de puncte materiale sau al unui domeniu material continuu, nu depinde de sistemul de referință ales, ci numai de modul de distribuție a maselor sistemului de puncte materiale sau ale domeniului material continuu considerat;

2) dacă toate masele unui sistem de puncte materiale sau al unui domeniu material continuu, se multiplică/simplifică cu același scalar, poziția centrului de masă nu se modifică; ceea ce conduce la concluzia că sistemele de puncte materiale sau domeniile materiale continue, realizate din materiale diferite dar omogene și care sunt identice din punct de vedere geometric, au centre de masă omoloage (coincid atunci când se suprapun sistemele sau domeniile materiale considerate);

3) dacă toate masele unui sistem de puncte materiale sau al unui domeniu material continuu, se află pe o dreaptă sau un plan, atunci și centrul de masă este situat pe acea dreaptă sau în acel plan;

4) dacă un sistem de puncte materiale sau un domeniu material continuu, are plan, axă sau centru de simetrie, atunci centrul de masă se va găsi în acel plan, pe acea axă sau în acel centru de simetrie;

5) centrul de masă al unui domeniu material  $D$ , format din  $n$  părți numite subdomenii,  $D_i$ , care au masele  $m_i$  și centrele de masă în punctele  $C_i$ , caracterizate de vectorii de poziție  $\bar{r}_{Ci}$ ,  $i = \overline{1, n}$ , se identifică cu centrul de masă al unui sistem de  $n$  puncte materiale cu masele  $m_i$  concentrate în cele  $n$  centre de masă ale subdomeniilor  $D_i$ .

Într-adevăr, pornind de la expresiile vectorilor de poziție ai centrelor de masă,  $C_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,

$$\bar{r}_{C1} = \frac{\int_{(D_1)} \bar{r} dm}{m_1}; \quad \bar{r}_{C2} = \frac{\int_{(D_2)} \bar{r} dm}{m_2}; \quad \dots; \quad \bar{r}_{Cn} = \frac{\int_{(D_n)} \bar{r} dm}{m_n} \quad (3.15)$$

se determină vectorul de poziție  $\bar{r}_C$  al centrului de masă al domeniului material  $D$  considerat

$$\begin{aligned} \bar{r}_C &= \frac{\int_{(D)} \bar{r} dm}{m} = \frac{\int_{(D_1)} \bar{r} dm + \int_{(D_2)} \bar{r} dm + \dots + \int_{(D_n)} \bar{r} dm}{m} = \\ &= \frac{m_1 \bar{r}_{C1} + m_2 \bar{r}_{C2} + \dots + m_n \bar{r}_{Cn}}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} \end{aligned} \quad (3.16)$$

**Observația 3.3:**

Dacă unul sau mai multe dintre subdomeniile  $D_i$  lipsesc (sunt extrase) din domeniul material,  $D$ , considerat, relația (3.16) rămâne valabilă, dar se atribuie semnul minus maselor care lipsesc (sunt extrase).

### 3.1.3. Centrul de masă al domeniilor materiale compuse

În numeroase aplicații tehnice, se cere să se determine centrul maselor pentru domenii materiale compuse dintr-un număr finit de părți ale căror centre de masă sunt cunoscute.

Având în vedere proprietatea 5 a centrelor de masă, prezentată în paragraful anterior, se recomandă următoarea metodă practică – sistematizată în tabelul 3.1. - pentru determinarea coordonatelor centrului de masă al unui domeniu material compus.

**Tabelul 3.1.** Determinarea coordonatelor centrului de masă

nr. crt.	masa (lungimea, aria, volumul)	coordonatele centrului de masă al subdomeniului			produse parțiale		
N	$m_i$	$x_i$	$y_i$	$z_i$	$m_i x_i$	$m_i y_i$	$m_i z_i$
I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
1	$m_1$	$x_1$	$y_1$	$z_1$	$m_1 x_1$	$m_1 y_1$	$m_1 z_1$
2	$m_2$	$x_2$	$y_2$	$z_2$	$m_2 x_2$	$m_2 y_2$	$m_2 z_2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
i	$m_i$	$x_i$	$y_i$	$z_i$	$m_i x_i$	$m_i y_i$	$m_i z_i$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$m_n$	$x_n$	$y_n$	$z_n$	$m_n x_n$	$m_n y_n$	$m_n z_n$
	$\sum_{i=1}^n m_i$				$\sum_{i=1}^n m_i x_i$	$\sum_{i=1}^n m_i y_i$	$\sum_{i=1}^n m_i z_i$

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i}; \quad y_C = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{\sum_{i=1}^n m_i}; \quad z_C = \frac{\sum_{i=1}^n m_i z_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

### 3.1.4. Centrul de masă al domeniilor materiale omogene uzuale

1) Centrul de masă al unui domeniu material omogen cu masa repartizată pe o curbă de lungime totală,  $L$  – cazul barelor

a) centrul de masă al unei bare omogene drepte

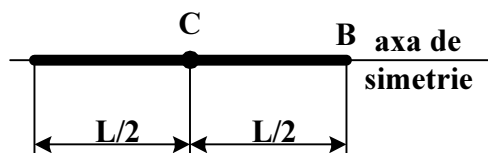


Fig. 3.2.

Din motive de simetrie, centrul de masă,  $C$ , se găsește la jumătatea lungimii barei, pe axa sa de simetrie (Figura 3.2).

b) centrul de masă al unei bare omogene în formă de arc de cerc

Se consideră o bară omogenă în formă de arc de cerc, având raza  $R$  și unghiul la centru  $2\alpha$  [rad].

Din motive de simetrie, centrul de masă,  $C$ , se va găsi pe bisectoarea unghiului.

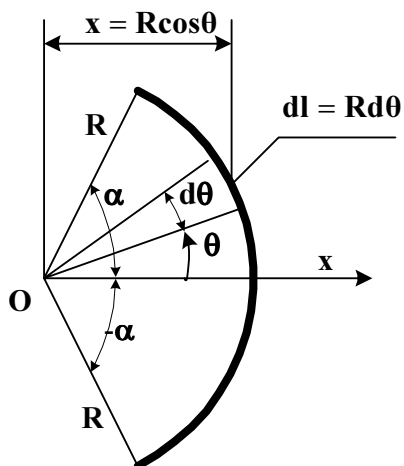


Fig. 3.3.

Așa cum se vede în Figura 3.3, la distanța  $\theta$  se alege o bară de lungime elementară  $dl = R d\theta$ , de forma unui arc de cerc având unghiul la centru  $d\theta$ .

Bară elementară considerată poate fi asimilată cu o bară dreaptă, al cărei centru de masă se găsește la jumătatea lun-

gimii sale, într-un punct de abscisă  $x = R \cos \theta$ .

Abscisa centrului de masă al barei omogene în formă de arc de cerc, se determină cu relația

$$x_C = \frac{\int_{(L)} x \cdot dl}{\int_{(L)} dl} = \frac{\int_{-\alpha}^{\alpha} R \cos \theta \cdot R d\theta}{\int_{-\alpha}^{\alpha} R d\theta} = \frac{R \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos \theta d\theta}{\int_{-\alpha}^{\alpha} d\theta} =$$

$$= \frac{R \sin \theta \Big|_{-\alpha}^{\alpha}}{\theta \Big|_{-\alpha}^{\alpha}} = R \frac{\sin \alpha}{\alpha} \quad (3.17)$$

## 2) Centrul de masă al unui domeniu material cu masa repartizată pe o suprafață de arie totală $S$ – cazul plăcilor

### a) centrul de masă al plăcilor plane omogene cu centru de simetrie (poligoane regulate)

Din motive de simetrie, centrul de masă,  $C$ , se găsește în centrul de simetrie al plăcii plane omogene considerate.

### b) centrul de masă al unei plăci triunghiulare plane omogene

Se consideră o placă plană de formă triunghiulară oare-

care,  $MNP$ , ca în Figura 3.4. Se descompune suprafața plăcii în fâșii elementare, paralele cu latura  $MP$ , de exemplu, care pot fi asimilate cu bare drepte, al căror centru de masă se găsește la

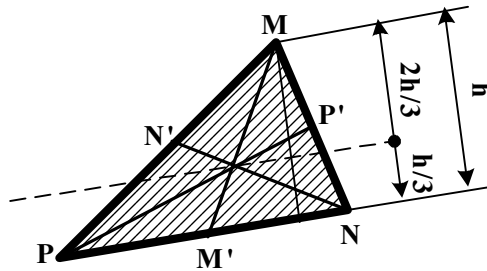


Fig. 3.4.



jumătatea lungimii lor.

Locul geometric al centrelor de masă ale acestor bare este mediana  $PP'$ .

Repetând operația și în raport cu celelalte laturi ale plăcii plane triunghiulare considerate, se obțin medianele  $MM'$  și  $NN'$ .

Centrul de masă al plăcii se va găsi la intersecția medianelor.

### c) centrul de masă al unei plăci omogene în formă de sector de cerc

Se consideră o placă omogenă în formă de sector de cerc, având raza  $R$  și unghiul la centru  $2\alpha$  [rad].

Din motive de simetrie, centrul de masă,  $C$ , se va găsi pe bisectoarea unghiului.

Așa cum se vede în Figura 3.5, la distanța  $\theta$  se alege o placă elementară, de forma unui sector de cerc având unghiul la centru  $d\theta$ .

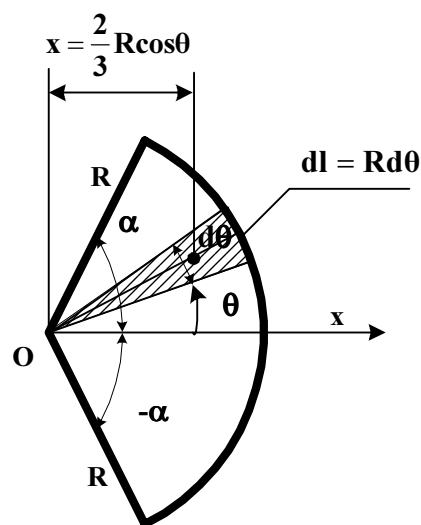


Fig. 3.5.

Placa elementară considerată, poate fi asimilată cu o placă triunghiulară, având baza de lungime  $dl = R d\theta$ ,  
 aria  $dA = \frac{1}{2} R^2 d\theta$ , și  
 al cărei centru de masă se găsește într-un punct de abscisă  
 $x = \frac{2}{3} R \cos \theta$ .

Abscisa centrului de masă al plăcii omogene în formă de sector de cerc, se determină cu relația

$$x_C = \frac{\int_{(s)} x \cdot dA}{\int_{(s)} dA} = \frac{\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{2}{3} R \cos \theta \cdot \frac{1}{2} R^2 d\theta}{\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{1}{2} R^2 d\theta} = \frac{\frac{2}{3} R \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos \theta d\theta}{\int_{-\alpha}^{\alpha} d\theta} =$$

$$= \frac{\frac{2}{3} R \sin \theta \Big|_{-\alpha}^{\alpha}}{\theta \Big|_{-\alpha}^{\alpha}} = \frac{2}{3} R \frac{\sin \alpha}{\alpha} \quad (3.18)$$

### 3) Centrul de masă al unui domeniu material cu masa repartizată spațial pe un volum V – cazul blocurilor sau corpurilor

#### a) centrul de masă al unui con

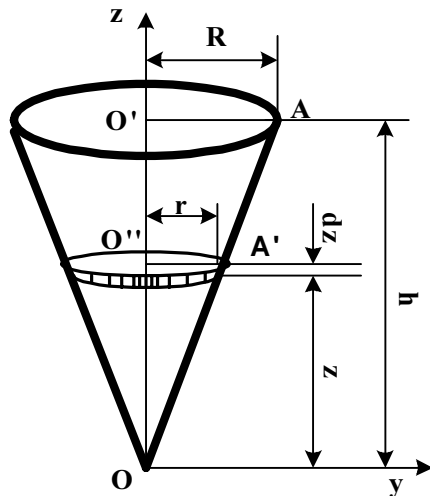


Fig. 3.6.

Se consideră un con circular drept, având înălțimea h și raza bazei R, ca în Figura 3.6.

La distanța z se consideră un volum elementar,

$$dv = \pi r^2 dz,$$

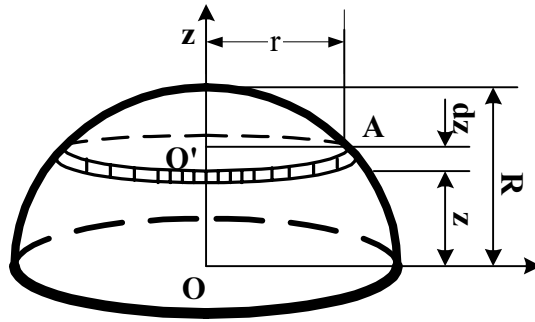
ce poate fi asimilat unui cilindru cu raza r. Din asemănarea triunghiurilor OO'A și OO''A' rezultă

$$r = \frac{R}{h} z.$$

Cota centrului de masă al conului se determină cu relația

$$z_C = \frac{\int_{(v)} z dv}{\int_{(v)} dv} = \frac{\int_0^h z \cdot \pi \left( \frac{R}{h} z \right)^2 dz}{\int_0^h \pi \left( \frac{R}{h} z \right)^2 dz} = \frac{\int_0^h z^3 dz}{\int_0^h z^2 dz} = \frac{\frac{1}{4} z^4 \Big|_0^h}{\frac{1}{3} z^3 \Big|_0^h} = \frac{3}{4} h \quad (3.19)$$

**b) centrul de masă al unei semisfere**



**Fig. 3.7.**

Se consideră o semisferă, de rază  $R$ , ca în Figura 3.7.

La distanța  $z$  se consideră un volum elementar,  $dv = \pi r^2 dz$ , ce poate fi asimilat unui cilindru cu raza  $r$ .

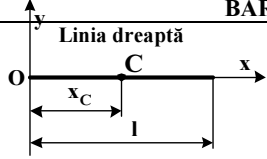
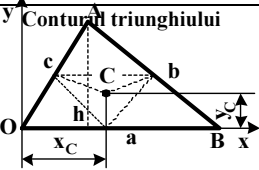
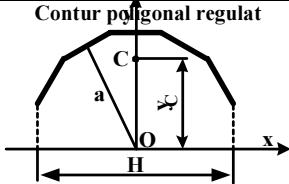
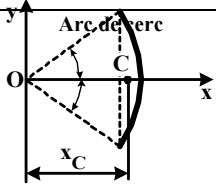
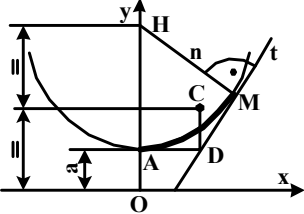
Din triunghiul  $OO'A$  rezultă  $r^2 = R^2 - z^2$ .

Cota centrului de masă al conului se determină cu relația

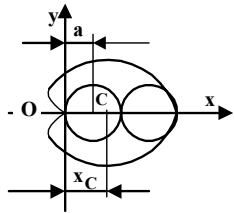
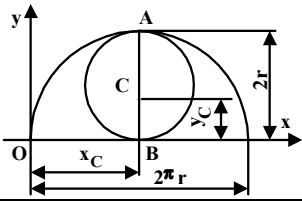
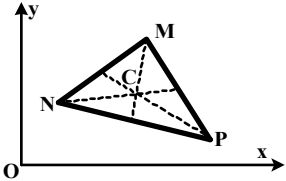
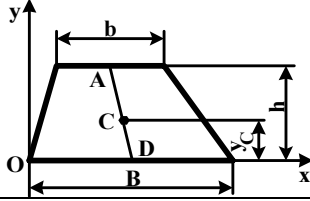
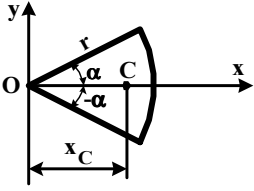
$$z_C = \frac{\int_{(v)} z dv}{\int_{(v)} dv} = \frac{\int_0^R z \cdot \pi (R^2 - z^2)^2 dz}{\int_0^R \pi (R^2 - z^2)^2 dz} = \frac{3}{8} R \quad (3.20)$$

În tabelul 3.2. sunt prezentate relațiile de calcul pentru coordonatele centrului de masă în cazul unor domenii materiale omogene, având diferite forme.

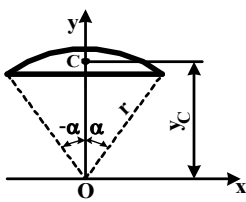
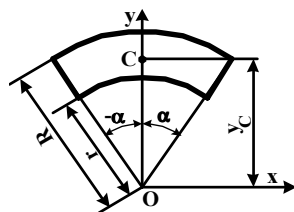
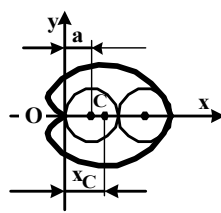
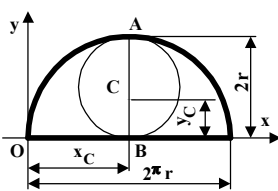
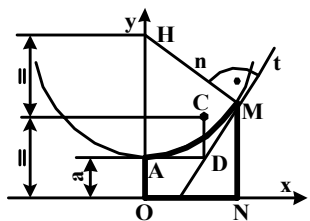
**Tabelul 3.2.** Centre de masă

FIGURA ȘI SISTEMUL DE COORDONATE	COORDONATELE CENTRULUI DE GREUTATE
<b>BARE OMOGENE</b>	
 <p>Linia dreaptă</p>	$x_c = \frac{l}{2}$
 <p>Conturul triunghiului</p>	<p>Intersecția bisectoarelor triunghiului median</p> $x_c = \frac{a(a + 2b) + x(c - b)}{2(a + b + c)}$ $y_c = \frac{h}{2} - \frac{b + c}{a + b + c}$
 <p>Contur poligonal regulat</p>	$y_c = OC = \frac{aH}{L}$ <p>a = apotema OA H = proiecția conturului poligonal pe o direcție Ox perpendiculară pe axa de simetrie L = lungimea conturului</p>
 <p>Arc de cerc</p>	$x_c = OC = r \frac{\sin \alpha}{\alpha}$
 <p>Arcul de lăntișor (AM)</p>	$x_c = AD \quad y_c = \frac{OH}{2}$ <p>D este intersecția tangentei în M cu orizontala în A, iar H este intersecția normalei în M cu Oy. a este parametrul lăntișorului</p>

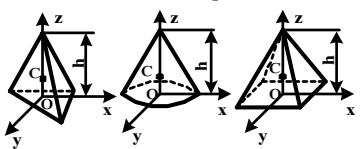
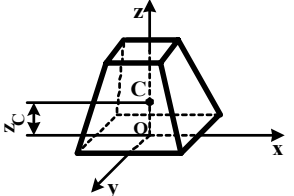
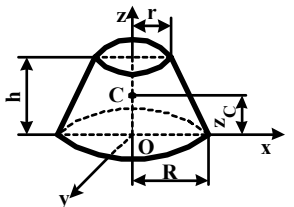
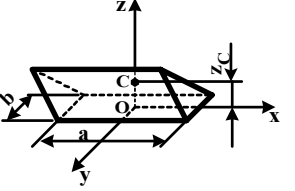
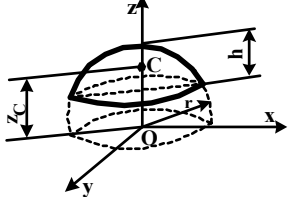
Tabelul 3.2: continuare

FIGURA ȘI SISTEMUL DE COORDONATE	COORDONATELE CENTRULUI DE GREUTATE
<p>Cardioida</p> 	$x_C = \frac{8a}{5}$
<p>Cicloida</p> 	$x_C = \pi r \quad y_C = \frac{4}{3} r$ <p><math>r = \text{raza cercului} \quad r = \frac{AB}{2}</math></p>
SUPRAFEȚE OMOGENE	
<p>Triunghi</p> 	$x_C = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$ $y_C = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$ <p>la intersecția medianelor</p>
<p>Trapez</p> 	$y_C = \frac{h}{3} \frac{2b + B}{B + b}$ <p>C se găsește pe segmentul AD, la cota <math>y_C</math>, A și D fiind mijloacele bazelor trapezului</p>
<p>Sector de cerc</p> 	$x_C = \frac{2}{3} r \frac{\sin \alpha}{\alpha}$

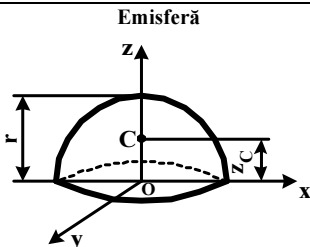
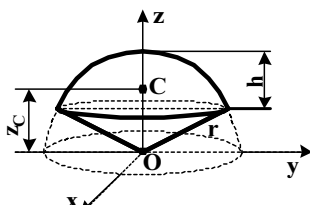
Tabelul 3.2: continuare

FIGURA ȘI SISTEMUL DE COORDONATE	COORDONATELE CENTRULUI DE GREUTATE
<p>Segment de cerc</p> 	$y_C = \frac{4}{3} \frac{r \sin^3 \alpha}{2\alpha - \sin 2\alpha}$
<p>Porțiune de coroană circulară</p> 	$y_C = \frac{2}{3} \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2} \frac{\sin \alpha}{\alpha}$
<p>Cardioidă</p> 	$x_C = \frac{11}{6} a$
<p>Cicloidă</p> 	$x_C = \pi r$ $y_C = \frac{5}{6} r$
<p>Aria OAMN a lăncșorului</p> 	$y = -\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$ $x_C = \frac{2a}{e+1} \quad y_C = \frac{a}{8} \frac{e^4 + 4e^2 - 1}{e(e^2 - 1)}$

Tabelul 3.2: continuare

FIGURA ȘI SISTEMUL DE COORDONATE	COORDONATELE CENTRULUI DE GREUTATE
<b>CORPURI OMOGENE</b>	
<p><b>Tetraedru, con, piramidă</b></p> 	<p>Pe dreapta ce unește vârful cu centrul de masă al bazei, la cota</p> $z_C = \frac{h}{4}$
<p><b>Trunchi de piramidă</b></p> 	<p>SB = aria bazei mari Sb = aria bazei mici H = înălțimea trunchiului de piramidă</p> $z_C = \frac{S_B + 2\sqrt{S_B S_b} + 3S_b}{S_B + \sqrt{S_B S_b} + S_b} \frac{h}{4}$
<p><b>Trunchi de con circular</b></p> 	$z_C = \frac{h}{4} \frac{R^2 + 2Rr + 3r^2}{R^2 + Rr + r^2}$
<p><b>Pană</b></p> 	$z_C = \frac{h}{2} \frac{(a + a_1)}{2a + a_1}$
<p><b>Calotă sferică</b></p> 	$z_C = \frac{3}{4} \frac{(2r - h)^2}{3r - h}$

**Tabelul 3.2:** continuare

FIGURA ȘI SISTEMUL DE COORDONATE	COORDONATELE CENTRULUI DE GREUTATE
<b>CORPURI OMOGENE</b>	
<p>Emisferă</p> 	$z_C = \frac{3}{8} r$
<p>Sector sferic</p> 	$z_C = \frac{3}{8} (2r - h)$

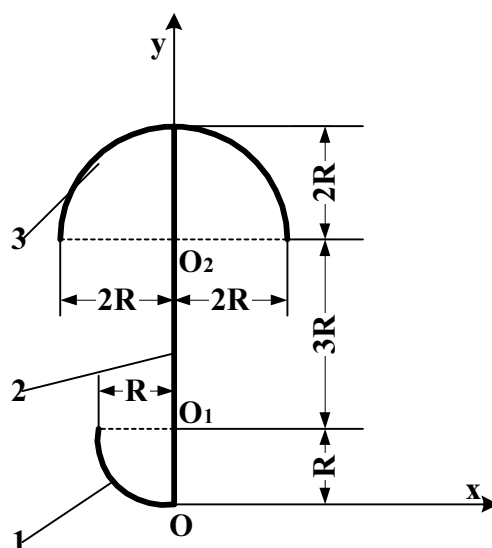


## APLICAȚII

### 1. Enunț:

În figura de mai jos se consideră o bară omogenă. Se cunosc dimensiunile indicate pe figură.

Se cere să se determine poziția centrului de masă al barei față de sistemul de referință Oxy.



### Rezolvare:

Pentru rezolvarea problemei, se recomandă folosirea metodei practice propusă la paragraful 3.1.3.

Bara din figură poate fi formată, din bara 1 de forma unui sfert de cerc de rază  $R$ , din bara 2 de forma unei drepte de lungime  $3R$ , și din bara de forma unui semicerc de rază  $2R$ .

Coordonatele  $x_C$ , și  $y_C$  ale centrului de masă,  $C$ , cerut se obțin cu ajutorul rezultatelor parțiale prezentate în tabelul următor:

	lungimea	coordonatele centrului de masă al subdomeniului		produse parțiale	
N	$L_i$	$x_i$	$y_i$	$L_i x_i$	$L_i y_i$
I	II	III	IV	V	VI
1	$\frac{\pi R}{2}$	$-\frac{2R}{\pi}$	$R - \frac{2R}{\pi}$	$-R^2$	$R^2 \left( \frac{\pi}{2} - 1 \right)$
2	$6R$	$0$	$3R$	$0$	$18R^2$
3	$2\pi R$	$0$	$4R + \frac{4R}{\pi}$	$0$	$8R^2(\pi + 1)$
$\sum_{i=1}^3$	$\frac{R}{2}(12 + 5\pi)$			$-R^2$	$\frac{R}{2}(50 + 17\pi)$

Rezultă coordonatele centrului de masă căutat

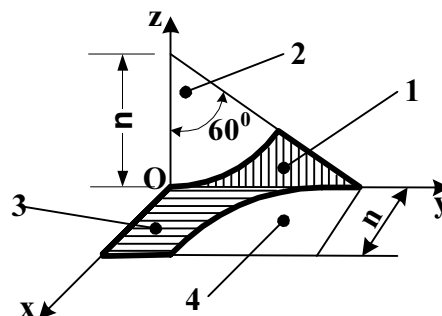
$$x_c = -\frac{2R}{12 + 5\pi}$$

$$y_c = \frac{R(50 + 17\pi)}{12 + 5\pi}$$

## 2. Enunț:

În figura de mai jos se consideră o placă omogenă spațială. Se cunosc dimensiunile indicate pe figură.

Se cere să se determine poziția centrului de masă al plăcii față de sistemul de referință Oxyz.



### Rezolvare

Pentru rezolvarea problemei, se recomandă folosirea metodei practice propusă la paragraful 3.1.3.

Placa din figură poate fi formată, în planul Oyz din placa de forma triunghiului dreptunghic 1 din care se decupează placa de forma sectorului de cerc 2 și, în planul Oxy din placa de forma dreptunghiulară 3 din care se decupează placa de forma sfertului de cerc 4.

Coordonatele  $x_C$ ,  $y_C$  și  $z_C$  ale centrului de masă, C, cerut se obțin cu ajutorul rezultatelor parțiale prezentate în tabelul de mai jos:

	Aria	coordonatele centrului de masă al subdomeniului			produse parțiale		
N	$A_i$	$x_i$	$y_i$	$z_i$	$A_i x_i$	$A_i y_i$	$A_i z_i$
I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
1	$\frac{\sqrt{3}}{2} n^2$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3} n$	$\frac{n}{3}$	0	$\frac{n^3}{2}$	$\frac{n^3 \sqrt{3}}{6}$
2	$-\frac{\pi n^2}{6}$	0	$\frac{n}{\pi}$	$n \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{\pi}\right)$	0	$-\frac{n^3}{6}$	$\frac{n^3 (\sqrt{3} - \pi)}{6}$
3	$n^2 \sqrt{3}$	$\frac{n}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2} n$	0	$\frac{n^3 \sqrt{3}}{2}$	$\frac{3n^3}{2}$	0
4	$-\frac{\pi n^2}{4}$	$n \left(1 - \frac{4}{3\pi}\right)$	$n \left(\sqrt{3} - \frac{4}{3\pi}\right)$	0	$\frac{-\pi n^3}{4} + \frac{n^3}{3}$	$\frac{n^3}{3} - \frac{\pi n^3 \sqrt{3}}{4}$	0

$$\sum_{i=1}^4 A_i = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{5\pi}{12} n^2$$

$$\sum_{i=1}^4 A_i x_i = \left( \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{3} \right) n^3$$

$$\sum_{i=1}^4 A_i y_i = \left( \frac{7}{6} - \frac{\pi\sqrt{3}}{4} \right) n^3$$

$$\sum_{i=1}^4 A_i z_i = \left( \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\pi}{6} \right) n^3$$

Rezultă coordonatele centrului de masă căutat

$$x_C = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{3}}{\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{5\pi}{12}} n$$

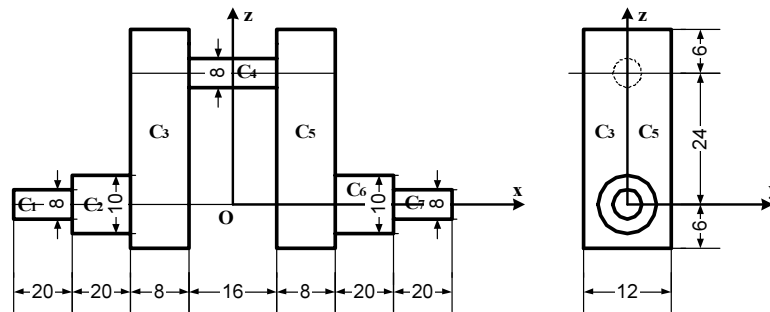
$$y_C = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{3}{2} - \frac{\pi\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{3}}{\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{5\pi}{12}} n$$

$$z_C = \frac{\frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{6}}{\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{5\pi}{12}} n$$

### 3. Enunț:

În figura de mai jos este reprezentat un arbore cotit omogen. Se cunosc dimensiunile indicate pe figură (în cm).

Se cere să se determine poziția centrului de masă al arborelui cotit față de sistemul de referință Oxy.



## NOȚIUNI DE GEOMETRIA MASELOR

### Rezolvare:

Pentru rezolvarea problemei, se recomandă folosirea metodei practice propusă la paragraful 3.1.3.

Arborele cotit considerat poate fi format din tronsoanele evidențiate pe figură și care au centrele de masă situate în punctele  $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7$ .

În baza simetriei și a omogenității rezultă  $x_C = y_C = 0$

Coordonata  $z_C$  a centrului de masă,  $C$ , cerut se obține cu ajutorul rezultatelor parțiale prezentate în tabelul de mai jos:

	Volumul	coordonatele centrului de masă al subdomeniului	produse parțiale
N	$V_i$	$z_i$	$V_i z_i$
I	II	II	
1	1005,31	0	0
2	1570,80	0	0
3	3456	12	41472
4	804,25	24	19302
5	3456	12	41472
6	1570,80	0	0
7	1005,31	0	0
$\sum_{i=1}^7$	12865,46	-	102246

Rezultă cota centrului de masă căutat

$$z_G = \frac{\sum_{i=1}^7 V_i z_i}{\sum_{i=1}^{12} V_i} = \frac{102246}{12865,46} = 7,946$$

## 3.2. MOMENTE STATICE

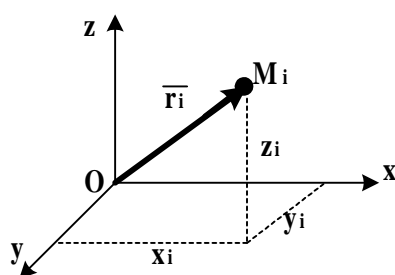


Fig. 3.8.

În raport cu un sistem de referință cartezian, Oxyz, poziția punctelor materiale,  $M_i$ , ale sistemului considerat este caracterizată de vectorii de poziție  $\vec{r}_i$ , respectiv de coordonatele  $(x_i, y_i, z_i)$ ,  $i = \overline{1, n}$  (Figura 3.8).

Momentele statice – numite *planare* - în raport cu planele xOy, yOz respectiv zOx, sunt definite de relațiile

$$S_{xOy} = \sum_{i=1}^n m_i z_i, \quad S_{yOz} = \sum_{i=1}^n m_i x_i, \quad S_{zOx} = \sum_{i=1}^n m_i y_i \quad (3.21)$$

Momentul static – numit *polar* - în raport cu punctul O este definit de relația

$$\vec{S}_O = \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i \quad (3.22)$$

Dacă toate punctele materiale ale sistemului sunt situate în același plan (de exemplu xOy), atunci se definesc momentele statice - numite *axiale* - în raport cu axa Ox respectiv Oy, cu relațiile

$$S_y = \sum_{i=1}^n m_i x_i; \quad S_x = \sum_{i=1}^n m_i y_i \quad (3.23)$$

**Observația 3.4:**

Din relațiile prezentate anterior, se observă că momentele statice planare sau axiale sunt mărimi scalare, iar momentul static polar este o mărime vectorială.

Din relațiile (3.5) care dau coordonatele centrului de masă,  $C$ , pentru un sistem de puncte materiale, având în vedere că masa totală a acestui sistem este  $\sum_{i=1}^n m_i = M$ , rezultă

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n m_i x_i &= x_C M; \\ \sum_{i=1}^n m_i y_i &= y_C M; \\ \sum_{i=1}^n m_i z_i &= z_C M\end{aligned}\tag{3.24}$$

Relația (3.24) reprezintă **teorema momentelor statice**, și se enunță astfel:

*Momentul static al unui sistem de puncte materiale calculat în raport cu un plan, o axă sau un punct, este egal cu produsul dintre masa întregului sistem de puncte materiale și distanța de la centrul de masă al sistemului la planul, axa sau punctul considerat.*

**Observația 3.5:**

Relația (3.24) conduce la concluzia că dacă momentul static al unui sistem de puncte materiale calculat în raport cu un plan, o axă sau un punct este nul, atunci centrul de masă al sistemului se găsește în acel plan, respectiv pe acea axă sau în acel punct.

Această observație este și reciproc valabilă, servind la rezolvarea unor importante probleme practice.

În cazul unui domeniu material continuu,  $(D)$ , sumele din relațiile anterioare se transformă în integrale, astfel încât se pot defini:

➤ momentele statice în raport cu planele  $xOy$ ,  $yOz$  respectiv  $zOx$ :

$$S_{xOy} = \int_{(D)} z \cdot dm, \quad S_{yOz} = \int_{(D)} x \cdot dm, \quad S_{zOx} = \int_{(D)} y \cdot dm \quad (3.25)$$

➤ momentul static în raport cu punctul O:

$$\bar{S}_O = \int_{(D)} \bar{r} \cdot dm \quad (3.26)$$

➤ dacă toate punctele materiale ale sistemului sunt situate toate într-un plan (de exemplu xOy), atunci se definesc momentele statice în raport cu axa Ox respectiv Oy, cu relațiile:

$$S_y = \int_{(D)} x \cdot dm; \quad S_x = \int_{(D)} y \cdot dm \quad (3.27)$$

Relațiile de mai sus se pot extinde, cu același înțeles, și la domeniile materiale omogene particulare, prin înlocuirea elementului de masă,  $dm$ , cu elementul de volum,  $dV$ , de suprafață,  $dA$ , sau de lungime,  $dl$ , al domeniului considerat.

Unitățile de măsură pentru momentele statice sunt

$$[S] = [M] \cdot [L] = \text{kgm} \quad \text{sau} \quad [S] = [F] \cdot [T]^2 = \text{Ns}^2$$

### 3.3. MOMENTE DE INERȚIE

#### 3.3.1. Definiții

##### **Definiția 3.1:**

Se numește *moment de inerție* al unui sistem de puncte materiale în raport cu un plan, o axă sau un punct, suma produselor dintre masele punctelor materiale care alcătuiesc sistemul și pătratele distanțelor de la aceste puncte la planul, axa sau punctul considerat.

##### **Definiția 3.2:**

Se numește *moment centrifugal* al unui sistem de puncte materiale, suma produselor dintre masele punctelor materiale care alcătuiesc sistemul și coordonatele acestor puncte în raport cu două plane perpendiculare.



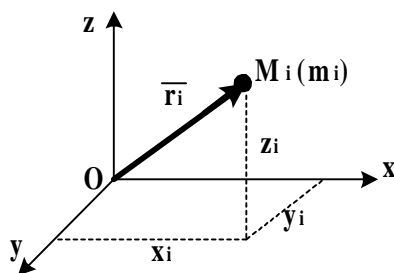


Fig. 3.9.

Se consideră (în Figura 3.9) un sistem de  $n$  puncte materiale,  $M_i$ , având masele  $m_i$ . În raport cu un sistem de referință cartezian,  $Oxyz$ , poziția punctelor materiale ale sistemului considerat este caracterizată de vectorii de poziție  $\vec{r}_i$ , respectiv de co-

ordonatele  $(x_i, y_i, z_i)$ ,  $i = \overline{1, n}$ .

Se definesc:

a) momentele– numite *planare* – în raport cu planele  $xOy$ ,  $yOz$  respectiv  $zOx$ , cu relațiile

$$J_{xOy} = \sum_{i=1}^n m_i z_i^2, \quad J_{yOz} = \sum_{i=1}^n m_i x_i^2, \quad J_{zOx} = \sum_{i=1}^n m_i y_i^2 \quad (3.28)$$

b) momentele– numite *axiale* – în raport cu axele  $Ox$ ,  $Oy$  respectiv  $Oz$ , cu relațiile

$$\begin{aligned} J_x &= \sum_{i=1}^n m_i (y_i^2 + z_i^2), \\ J_y &= \sum_{i=1}^n m_i (z_i^2 + x_i^2), \\ J_z &= \sum_{i=1}^n m_i (x_i^2 + y_i^2) \end{aligned} \quad (3.29)$$

c) momentul– numit *polar* – în raport cu originea sistemului de referință cartezian  $Oxyz$ , cu relația

$$J_O = \sum_{i=1}^n m_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) \quad (3.30)$$

d) momentele– numite *centrifugale* – cu relațiile

$$J_{xy} = \sum_{i=1}^n m_i x_i y_i, \quad J_{yz} = \sum_{i=1}^n m_i y_i z_i, \quad J_{zx} = \sum_{i=1}^n m_i z_i x_i \quad (3.31)$$

În cazul unui domeniu material continuu, (D), sumele din relațiile anterioare se transformă în integrale, astfel încât se pot defini

a) momentele– numite *planare* – în raport cu planele xOy, yOz respectiv zOx, cu relațiile

$$J_{xOy} = \int_{(D)} z^2 dm, \quad J_{yOz} = \int_{(D)} x^2 dm, \quad J_{zOx} = \int_{(D)} y^2 dm \quad (3.32)$$

b) momentele– numite *axiale* – în raport cu axele Ox, Oy respectiv Oz, cu relațiile

$$\begin{aligned} J_x &= \int_{(D)} (y^2 + z^2) dm, \\ J_y &= \int_{(D)} (z^2 + x^2) dm, \\ J_z &= \int_{(D)} (x^2 + y^2) dm \end{aligned} \quad (3.33)$$

c) momentul– numit *polar* – în raport cu originea sistemului de referință cartezian Oxyz, cu relația

$$J_O = \int_{(D)} (x^2 + y^2 + z^2) dm \quad (3.34)$$

d) momentele– numite *centrifugale* – cu relațiile

$$J_{xy} = \int_{(D)} xy dm, \quad J_{yz} = \int_{(D)} yz dm, \quad J_{zx} = \int_{(D)} zx dm \quad (3.35)$$

Momentele de inerție sunt mărimi geometrice ce caracterizează un sistem de puncte materiale sau un domeniu material continuu, din punctul de vedere al răspândirii masei sale. Ele sunt o măsură a inerției unui sistem de puncte materiale sau a unui domeniu material continuu în mișcare de rotație.

Momentele de inerție planare, axiale și polare sunt mărimi scalare pozitive (în cazuri particulare pot fi și nule) iar momentele de inerție centrifugale sunt mărimi scalare pozitive, negative sau nule.

Unitățile de măsură pentru momentele de inerție sunt  
 $[J] = [M] \cdot [L]^2 = \text{kgm}^2$  sau  $[J] = [F] \cdot [L] \cdot [T]^2 = \text{Nms}^2$

### **3.3.2. Relații între momentele de inerție.**

Din relațiile de definiție prezentate în paragraful anterior, se deduc cu ușurință relațiile de legătură dintre momentele de inerție, după cum urmează

$$\begin{aligned} J_x &= J_{xOy} + J_{zOx}, \quad J_y = J_{yOz} + J_{xOy}, \quad J_z = J_{zOx} + J_{yOz} \\ J_O &= J_{xOy} + J_{yOz} + J_{zOx} \\ 2J_O &= J_x + J_y + J_z \end{aligned} \quad (3.36)$$

#### **Observația 3.6:**

În relațiile (3.36), numai șase dintre mărimi se consideră independente (momentele de inerție axiale,  $J_x$ ,  $J_y$ ,  $J_z$  și momentele centrifugale,  $J_{xy}$ ,  $J_{yz}$ ,  $J_{zx}$ ) în funcție de acestea putându-se calcula celelalte momente de inerție.

În tehnică, în afara *momentelor de inerție mecanice*, definite anterior, se mai utilizează și *momentele de inerție geometrice*. Ele au expresii și denumiri similare cu cele ale momentelor de inerție mecanice și se obțin din acestea prin înlocuirea elementului de masă,  $dm$ , cu elementul de volum,  $dV$ , de suprafață,  $dA$ , sau de lungime,  $dl$ , al domeniului material considerat.

Dacă se notează cu  $I$  momentul de inerție geometric, atunci este evident valabilă relația

$$J = \rho I \quad (3.37)$$

în care,  $\rho$  reprezintă densitatea materialului.

Relația (3.37) este valabilă pentru domenii materiale continue, omogene (realizate din același material și având aceeași secțiune transversală), pentru care densitatea,  $\rho$ , este constantă.

**Definiția 3.3:**

Se numește *rază de inerție* sau *rază de rotație*, distanța fictivă față de un plan, o axă sau un punct la care ar trebui plasată întreaga masă - concentrată într-un singur punct – a unui sistem de puncte materiale sau a unui domeniu material continuu, pentru a obține aceeași valoare a momentului de inerție ca și aceea dată de întregul sistem de puncte materiale sau domeniu material continuu, considerat.

Notând cu  $i$  raza de inerție și cu  $M$  masa sistemului de puncte materiale sau a domeniului material considerat, se poate scrie

$$J = M \cdot i^2 \quad (3.38)$$

de unde se obține

$$i = \sqrt{\frac{J}{M}} \quad (3.39)$$

**3.3.3. Variația momentelor de inerție**

În cazul unui sistem de puncte materiale sau al unui domeniu material continuu, există o infinitate de momente de inerție. În afara relațiilor de legătură prezentate în paragraful anterior, există două tipuri de relații de legătură, esențiale pentru calculul oricărui moment de inerție:

➤ relații între momentele de inerție scrise față de un sistem de referință  $Oxyz$  și cele scrise față de un sistem de referință  $Cx'y'z'$  având axele paralele cu primul și originea în centrul de masă al sistemului de puncte materiale sau al domeniului material considerat. Aceste relații de legătură exprimă variația momentelor de inerție față de axe paralele;

➤ relații între momentele de inerție scrise față de un sistem de referință  $Cxyz$  și cele scrise față de un sistem de

referință  $Cx'y'z'$ , având, ca și primul, originea în centrul de masă al sistemului de puncte materiale sau al domeniului material considerat, dar axele rotite cu un anumit unghi. Aceste relații de legătură exprimă variația momentelor de inerție față de axe concurente.

### **Variația momentelor de inerție față de axe paralele**

Fie două axe paralele,  $\Delta$  și  $\Delta_1$  situate la distanța  $d$  una față de cealaltă, axa  $\Delta$  trecând prin centrul maselor,  $C$ , al unui sistem de puncte materiale.

Se alege un sistem de referință cartezian,  $Oxyz$ , având axa  $\Delta$  ca axă  $Oz$ .

În raport cu acest reper, coordonatele unui punct oarecare  $M_i$ , de masă  $m_i$ , care aparține sistemului de puncte materiale ales, sunt  $x_i, y_i, z_i$ .

Prin punctul  $M_i$  se construiește planul paralel cu  $Oxy$  care întâlnește axa  $\Delta$  în punctul  $B$  și axa  $\Delta_1$  în punctul  $A$  ( $AB = d$ ).

Momentul de inerție al sistemului de puncte materiale sau al domeniului material continuu considerat față de axa  $\Delta_1$ , conform Figurii 3.10, este

$$J_{\Delta_1} = \sum_{i=1}^n m_i \cdot l_i^2 = \sum_{i=1}^n m_i [(x_i - a)^2 + (y_i - b)^2] \quad (3.40)$$

Din relația (3.40) în care  $a$  și  $b$  sunt coordonatele punctului în care axa  $\Delta_1$  întâlnește planul  $Oxy$ , se obține

$$\begin{aligned} J_{\Delta_1} = & \sum_{i=1}^n m_i (x_i^2 + y_i^2) - 2a \sum_{i=1}^n m_i \cdot x_i - \\ & - 2b \sum_{i=1}^n m_i \cdot y_i + (a^2 + b^2) \sum_{i=1}^n m_i \end{aligned} \quad (3.41)$$

În relația (3.41) se ține seama de următoarele observații:  
 $a^2 + b^2 = d^2$

$\sum_{i=1}^n m_i = M$  este masa totală a sistemului de puncte materiale

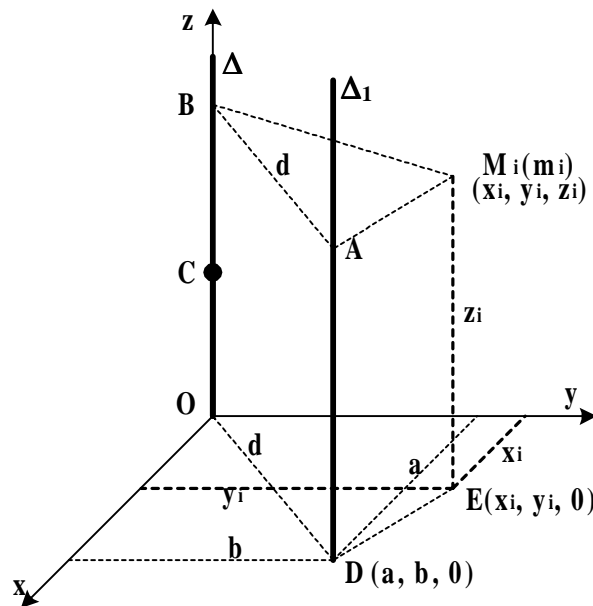


Fig. 3.10.

$$\sum_{i=1}^n m_i (x_i^2 + y_i^2) = \sum_{i=1}^n m_i \cdot d_i^2 = J_{\Delta}, \text{ în baza relației de definiție}$$

$$\sum_{i=1}^n m_i \cdot x_i = M \cdot \xi = 0; \quad \sum_{i=1}^n m_i \cdot y_i = M \cdot \eta = 0$$

Deoarece centrul maselor sistemului de puncte materiale ales se găsește pe axa Oz a sistemului de referință, el are coordonatele C( $\xi=0$ ,  $\eta=0$ ,  $\zeta$ ).

Se obține

$$J_{\Delta_1} = J_{\Delta} + M \cdot d^2 \quad (3.42)$$

Relația (3.42) reprezintă **teorema lui Steiner**, și se enunță astfel:

*Momentul de inerție calculat în raport cu o axă  $\Delta_1$  este egal cu momentul de inerție calculat în raport cu o altă axă  $\Delta$ , paralelă cu prima și care trece prin centrul maselor unui sistem de puncte materiale, adunat cu produsul dintre masa totală a sistemului și pătratul distanței dintre cele două axe.*

Din teorema lui Steiner decurg următoarele proprietăți ale momentelor de inerție față de axe paralele:

➤ dintre toate momentele de inerție în raport cu axele  $\Delta_1$  paralele cu o direcție, momentul de inerție în raport cu axa  $\Delta_0$  care trece prin centrul de masă al sistemului de puncte materiale, este minim;

➤ locul geometric al axelor paralele față de care momentele de inerție sunt egale, este un cilindru circular a cărui axă de simetrie trece prin centrul de masă al sistemului de puncte materiale considerat și este paralelă cu direcția dată.

Se poate demonstra că teorema lui Steiner este valabilă și pentru momente de inerție planare, polare sau centrifugale.

Astfel, dacă se consideră un sistem de referință  $Oxyz$  și un sistem de referință  $Cx'y'z'$  având axele paralele cu primul și originea în centrul de masă  $C(\xi, \eta, \zeta)$  al sistemului de puncte materiale considerat, pentru momentele de inerție axiale sunt valabile relațiile (3.43) echivalente cu relația (3.42)

$$\begin{aligned} J_{x'} &= J_x + M(\eta^2 + \zeta^2) \\ J_{y'} &= J_y + M(\zeta^2 + \xi^2) \\ J_{z'} &= J_z + M(\xi^2 + \eta^2) \end{aligned} \quad (3.43)$$

Pentru momentele de inerție planare se scrie

$$\begin{aligned} J_{x'Cy'} &= J_{xOy} + M \cdot \zeta^2 \\ J_{y'Cz'} &= J_{yOz} + M \cdot \xi^2 \\ J_{z'Cx'} &= J_{zOx} + M \cdot \eta^2 \end{aligned} \quad (3.44)$$

Pentru momentul de inerție polar se scrie

$$J_C = J_O + M(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) \quad (3.45)$$

Pentru momentele centrifugale se scrie

$$\begin{aligned} J_{x'y'} &= J_{xy} + M \cdot \xi \cdot \eta \\ J_{y'z'} &= J_{yz} + M \cdot \eta \cdot \zeta \\ J_{z'x'} &= J_{zx} + M \cdot \zeta \cdot \xi \end{aligned} \quad (3.46)$$

### Variația momentelor de inerție față de axe concurente

Se consideră un sistem de referință  $Oxyz$ , în raport cu care se cunosc momentele de inerție axiale,  $J_x$ ,  $J_y$ ,  $J_z$ , și momentele centrifugale,  $J_{xy}$ ,  $J_{yz}$ ,  $J_{zx}$  ale unui punct oarecare,  $M_i$ , de masă  $m_i$ , aparținând unui sistem de puncte materiale. Poziția punctului  $M_i$  față de sistemul de referință ales, este definită de coordonatele  $x_i$ ,  $y_i$ ,  $z_i$ .

Se poate determina momentul de inerție în raport cu o axă  $\Delta$  care trece prin  $O$  și are direcția dată de cosinusurile directoare  $\cos \alpha$ ,  $\cos \beta$ ,  $\cos \gamma$ .

Conform celor arătate în Figura 3.11, momentul de inerție al sistemului de puncte materiale în raport cu axa  $\Delta$  este

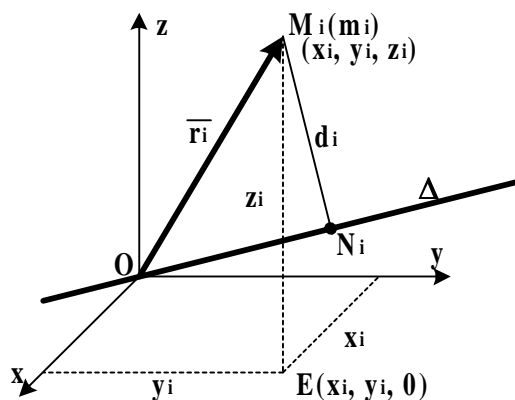


Fig. 3.11.

$$J_{\Delta} = \sum_{i=1}^n m_i \cdot d_i^2 \quad (3.47)$$

unde  $d_i = |\overline{M_i N_i}|$  este distanța de la punctul  $M_i$  la axa  $\Delta$ .



Punctul  $M_i$  are poziția definită de vectorul de poziție

$$\vec{r}_i = x_i \vec{i} + y_i \vec{j} + z_i \vec{k}.$$

Versorul axei  $\Delta$  este  $\vec{u} = \cos \alpha \vec{i} + \cos \beta \vec{j} + \cos \gamma \vec{k}$ .

$N_i$  este proiecția punctului  $M_i$  pe axa  $\Delta$  și se poate scrie

$$d_i^2 = \vec{r}_i^2 - \overline{ON_i}^2 = (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)(\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) - (x_i \cos \alpha + y_i \cos \beta + z_i \cos \gamma)^2$$

deoarece  $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$  și

$$ON_i = \vec{r}_i \vec{u} = x_i \cos \alpha + y_i \cos \beta + z_i \cos \gamma.$$

După înlocuiri și gruparea convenabilă a termenilor, relația (3.47) devine

$$\begin{aligned} J_{\Delta} = & \cos^2 \alpha \sum_{i=1}^n m_i (y_i^2 + z_i^2) + \cos^2 \beta \sum_{i=1}^n m_i (z_i^2 + x_i^2) + \\ & + \cos^2 \gamma \sum_{i=1}^n m_i (x_i^2 + y_i^2) - 2 \cos \beta \cos \gamma \sum_{i=1}^n m_i y_i z_i - \\ & - 2 \cos \gamma \cos \alpha \sum_{i=1}^n m_i z_i x_i - 2 \cos \alpha \cos \beta \sum_{i=1}^n m_i x_i y_i \end{aligned} \quad (3.48)$$

Ținând seama de relațiile (3.2) și (3.4), se obține

$$\begin{aligned} J_{\Delta} = & J_x \cos^2 \alpha + J_y \cos^2 \beta + J_z \cos^2 \gamma - \\ & - 2J_{yz} \cos \beta \cos \gamma - 2J_{zx} \cos \gamma \cos \alpha - 2J_{xy} \cos \alpha \cos \beta \end{aligned} \quad (3.49)$$

### 3.3.4. Axe principale de inerție. Momente de inerție principale. Elipsoid de inerție

Din relația (3.49) se vede că momentul de inerție  $J_{\Delta}$  calculat în raport cu o axă  $\Delta$  ce trece prin originea sistemului de axe de coordonate,  $Oxyz$ , depinde de orientarea axei  $\Delta$  în raport cu sistemul considerat, dată de cosinusurile directoare.

**Definiția 3.5:**

Dintre toate axele care trec prin punctul O, acelea pentru care momentul de inerție  $J_{\Delta}$  ia valori extreme – maxime și minime – se numesc *axe principale de inerție* relative la punctul O, iar momentele de inerție calculate în raport cu aceste axe se numesc *momente de inerție principale* relative la punctul O și se notează  $J_1, J_2, J_3$ .

Momentele de inerție principale rezultă din impunerea condiției de extrem funcției  $J_{\Delta}(\cos\alpha \cos\beta \cos\gamma)$  dată de relația (3.49). Se arată că, folosind metoda multiplicatorilor Lagrange  $\lambda$ , această condiție se scrie:

$$\begin{vmatrix} J_x - \lambda & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_y - \lambda & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_z - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (3.50)$$

Se obține astfel o ecuație de gradul al treilea în  $\lambda$  care are întotdeauna rădăcini reale deoarece elementele determinantului sunt simetrice față de diagonala principală. Rădăcinile  $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$  ale ecuației (3.50) sunt chiar momentele de inerție principale relative la punctul O, notate

$$J_1 = \lambda_1 \quad J_2 = \lambda_2 \quad J_3 = \lambda_3 \quad (3.51)$$

Axele  $\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3$  corespunzătoare acestor momente de inerție sunt axele principale de inerție relative la punctul O, și au ca parametri directori, determinanții

$$\begin{vmatrix} J_y - J_i & -J_{xy} \\ -J_{zy} & J_z - J_i \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} -J_{yz} & -J_{ux} \\ J_z - J_i & -J_{zx} \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} -J_{yx} & J_y - J_i \\ -J_{zx} & -J_{zy} \end{vmatrix} \quad (3.52)$$

unde  $i = \overline{1,3}$  pentru axele  $\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3$  respectiv.

Se demonstrează următoarele proprietăți ale axelor principale de inerție:

➤ axele principale de inerție formează un triedru ortogonal;

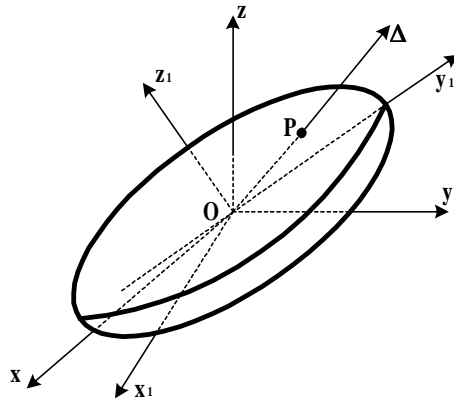
➤ momentele centrifugale calculate în raport cu axele principale de inerție sunt nule.

**Observația 3.7:**

Dacă centrul de masă,  $C$ , al sistemului de puncte materiale coincide cu originea sistemului de axe de coordonate,  $Oxyz$ ,  $O \equiv C$  momentele de inerție calculate în raport cu axele ce trec prin acest punct, se numesc *momente de inerție centrale*.

Momentele calculate în raport cu axele principale de inerție, relative la centrul de greutate se numesc *momente de inerție centrale și principale* și sunt momente de inerție maxime sau minime.

Pentru a obține o reprezentare geometrică tridimensională a modului de variație a momentelor de inerție calculate în raport cu axele ce trec prin punctul  $O$ , se folosește *elipsoidul de inerție* corespunzător punctului  $O$  (Figura 3.12).



**Fig. 3.12.**

Axele de simetrie  $Ox_1y_1z_1$  ale elipsoidului de inerție sunt chiar axele principale de inerție relative la punctul  $O$ , deoarece față de aceste axe momentele de inerție sunt extreme.

Pe axa  $\Delta$  care trece prin punctul  $O$ , se consideră punctul  $P$ , astfel că, măsurând în unități convenționale,

$$\overline{OP} = \frac{1}{\sqrt{J_{\Delta}}} \quad (3.53)$$

Coordonatele punctului  $P$  sunt

$$x = \frac{\cos \alpha}{\sqrt{J_{\Delta}}}, \quad y = \frac{\cos \beta}{\sqrt{J_{\Delta}}}, \quad z = \frac{\cos \gamma}{\sqrt{J_{\Delta}}} \quad (3.54)$$

Înlocuind relația (3.54) în (3.49), se obține ecuația unui elipsoid, numit elipsoid de inerție

$$J_x x^2 + J_y y^2 + J_z z^2 - 2J_{xy} xy - 2J_{yz} yz - 2J_{zx} zx = 1 \quad (3.55)$$

Ecuația elipsoidului de inerție față de axele sale de simetrie este

$$J_1 x_1^2 + J_2 y_1^2 + J_3 z_1^2 = 1 \quad (3.56)$$

ceea ce demonstrează faptul că în raport cu axele principale de inerție, momentele centrifugale sunt nule.

Dacă se notează

$$\frac{1}{J_1} = a^2, \quad \frac{1}{J_2} = b^2, \quad \frac{1}{J_3} = c^2 \quad (3.57)$$

ecuația (3.56) se scrie în forma canonică

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} + \frac{z_1^2}{c^2} = 1 \quad (3.58)$$

în care  $a$ ,  $b$ ,  $c$  sunt semiaxele elipsoidului de inerție. Relația (3.57) se mai scrie

$$J_1 = \frac{1}{a^2}, \quad J_2 = \frac{1}{b^2}, \quad J_3 = \frac{1}{c^2} \quad (3.59)$$

ceea ce arată că momentele principale de inerție sunt invers proporționale cu pătratul semiaxelor elipsoidului de inerție. În general, momentul de inerție,  $J_\Delta$ , calculat în raport cu o axă  $\Delta$  este invers proporțional cu distanța  $\overline{OP}$  determinată de elipsoidul de inerție pe acea axă.

**Observația 3.8:**

În plan, elipsoidul de inerție se transformă în *elipsă de inerție*.

### 3.3.5. Proprietățile momentelor de inerție

Dacă există simetrii în modul de repartitie a masei sistemului de puncte materiale sau a domeniului material continuu considerat, atunci direcțiile axelor principale de inerție relative la un punct oarecare se pot stabili direct pe baza unor proprietăți rezultate din aceste simetrii.

1. Dacă există un plan de simetrie în repartitia masei, atunci normala la acest plan, într-un punct oarecare, O, al planului, este axă principală de inerție;

Dacă se consideră ca plan de simetrie planul Oxy, atunci, în mod firesc, oricărei particule elementare de masă, dm, și cotă z, îi corespunde o altă particulă elementară de masă dm și cotă -z, și deci,

$$\begin{aligned} J_{xz} &= \int_{(D)} x \cdot z \cdot dm = 0 \\ J_{yz} &= \int_{(D)} y \cdot z \cdot dm = 0 \end{aligned} \quad (3.60)$$

În acest caz, relația (3.55) a elipsoidului de inerție relativ la punctul O are expresia dată de relația

$$J_x x^2 + J_y y^2 + J_z z^2 - 2J_{xy} xy = 1 \quad (3.61)$$

care, din punct de vedere geometric, arată că elipsoidul de inerție se rotește numai în jurul axei Oz și deci, această axă coincide cu una dintre axele principale de inerție.

Când  $O \equiv C$ , centrul de masă al domeniului material considerat, aflat tot în planul de simetrie în repartitia masei, normala Cz la planul de simetrie este chiar axă centrală și principală de inerție.

2. Dacă există o axă de simetrie în repartitia masei și trece printr-un punct oarecare, O, atunci această axă este chiar axă centrală și principală de inerție;

Dacă se consideră ca axă de simetrie axa Oz, atunci, oricărei particule elementare de masă dm și coordonate (x, y, z),

îi corespunde o particulă elementară de masă  $dm$  și coordonate  $(-x, -y, z)$  și sunt valabile relațiile

$$\begin{aligned} J_{xz} &= \int_{(D)} x \cdot z \cdot dm = 0 \\ J_{yz} &= \int_{(D)} y \cdot z \cdot dm = 0 \end{aligned} \quad (3.62)$$

În acest caz, elipsoidul de inerție relativ la punctul O are expresia dată de relația

$$J_x x^2 + J_y y^2 + J_z z^2 - 2J_{xy} xy = 1 \quad (3.63)$$

iar axa Oz este axă principală de inerție. Deoarece centrul de masă se află pe această axă, ea este chiar axă centrală și principală de inerție.

3. dacă există simetrie de revoluție în repartitia masei, atunci axa de simetrie de revoluție și cu orice pereche de axe perpendiculare între ele și perpendiculare simultan și pe axa de simetrie de revoluție într-un punct oarecare, O, al ei, sunt axe principale de inerție relative la punctul O. Când  $O \equiv C$ , toate cele trei axe sunt axe centrale și principale de inerție.

### **3.3.6. Momente de inerție pentru domenii materiale omogene uzuale**

#### **1) Dreptunghi**

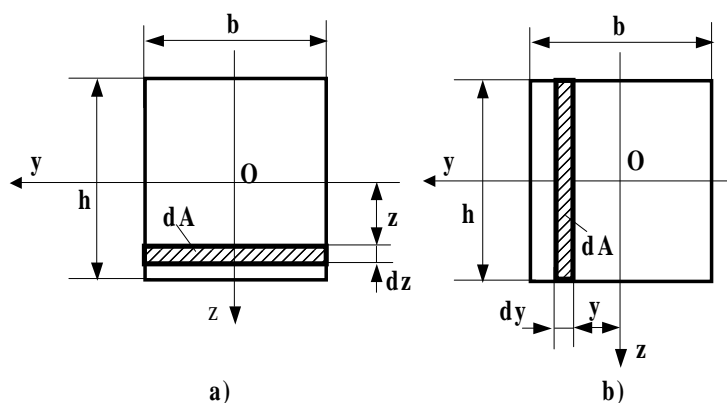
Se consideră un element infinit mic  $dA$  dintr-o secțiune dreptunghiulară cu laturile  $b$  și  $h$  ca în Figura 3.13.

Analizând secțiunea dreptunghiulară din Figura 3.13.a, putem exprima elementul de arie sub forma :

$$dA = b \cdot dz \quad (3.64)$$

Momentul de inerție axial, calculat în raport cu axa Oy, este

$$J_y = \int_A z^2 \cdot dA = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 \cdot b \cdot dz = \frac{b \cdot h^3}{12} \quad (3.65)$$



**Fig. 3.13.**

Raza de inerție este, corespunzător relației sale de definiție

$$i_y = \sqrt{\frac{J_y}{A}} = \sqrt{\frac{\frac{bh^3}{12}}{bh}} = \frac{h}{2\sqrt{3}} \quad (3.66)$$

Analizând secțiunea din Figura 3.13.b, putem exprima elementul de arie sub forma :

$$dA = h \cdot dy \quad (3.67)$$

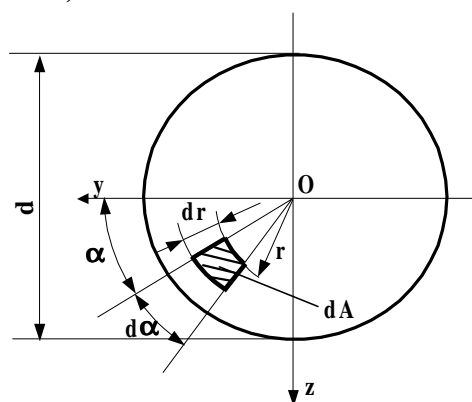
Momentul de inerție axial, calculat în raport cu axa Oz, este

$$J_z = \int_A y^2 \cdot dA = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} y^2 \cdot h \cdot dy = \frac{h \cdot b^3}{12} \quad (3.68)$$

Raza de inerție este, corespunzător relației sale de definiție

$$i_z = \sqrt{\frac{J_z}{A}} = \sqrt{\frac{\frac{b^3 h}{12}}{bh}} = \frac{b}{2\sqrt{3}} \quad (3.69)$$

## 2) Cerc



Se consideră un element infinit mic  $dA$  dintr-o secțiune circulară de rază  $r$  ca în Figura 3.14.

Analizând secțiunea din Figura 3.14, putem exprima elementul de arie sub forma

$$dA = r \cdot dr \cdot d\alpha \quad (3.70)$$

**Fig. 3.14.**

Momentul de inerție polar, este

$$J_O = \int_A r^2 \cdot dA = \int_0^{\frac{d}{2}} r^3 dr \int_0^{2\pi} d\alpha = \frac{\pi d^4}{32} \quad (3.71)$$

Din motive de simetrie, momentele de inerție axiale sunt egale

$$J_y = J_z = \frac{J_O}{2} \quad (3.72)$$

Momentul de inerție axial este, prin urmare

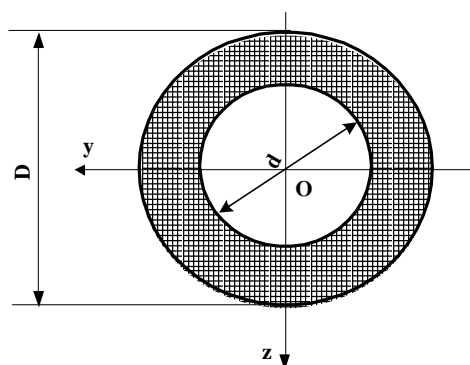


$$J_y = J_z = \frac{J_o}{2} = \frac{\pi \cdot d^4}{64} \quad (3.73)$$

Raza de inerție este, corespunzător relației sale de definiție

$$i_y = i_z = \sqrt{\frac{J_y}{A}} = \frac{d}{4} \quad (3.74)$$

### 3) Inel circular



**Fig. 3.15.**

Momentul de inerție polar

$$J_o = \frac{\pi D^4}{32} - \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi}{32} (D^4 - d^4) \quad (3.75)$$

Momentul de inerție axial

$$J_y = J_z = \frac{\pi D^4}{64} - \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi}{64} (D^4 - d^4) \quad (3.76)$$

Raza de inerție este, corespunzător relației sale de definiție

$$i_y = i_z = \sqrt{\frac{\frac{\pi}{64}(D^4 - d^4)}{\pi(D^2 - d^2)}} = \frac{1}{4} \sqrt{(D^2 + d^2)} \quad (3.77)$$

### 3.3.7. Calculul momentelor de inerție ale suprafețelor compuse

Calculul momentelor de inerție la pentru un domeniu material compus, cuprinde următoarele etape:

➤ se descompune domeniul material într-o serie de subdomenii simple;

➤ se determină poziția centrului de greutate al întregului domeniu material considerat, față de un sistem de referință arbitrar ales;

➤ se calculează momentele de inerție axiale și momentul de inerție centrifugal în raport cu axele centrale, ale tuturor subdomeniilor materiale alese și care însumate, determină momentele de inerție ale întregului domeniu material considerat;

➤ se determină poziția axelor de inerție principale și valoarea momentelor principale de inerție.

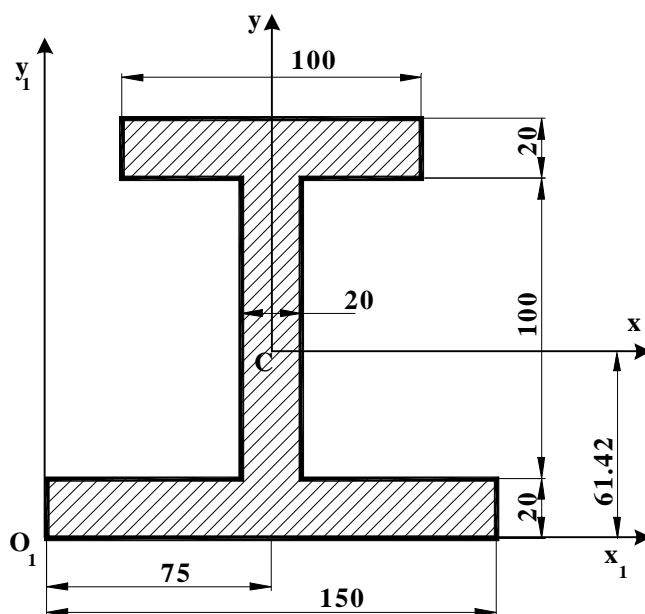
Pentru exemplificare, se consideră profilul din Figura 3.16 pentru care se parcurge algoritmul de calcul prezentat anterior.

➤ se alege un sistem de referință arbitrar  $O_1x_1y_1$ ;

➤ se calculează poziția centrului de masă în raport cu  $O_1x_1y_1$ , corespunzător relațiilor

$$x_c = \frac{\sum A_i x_i}{\sum A_i} = \frac{150 \cdot 20 \cdot 75 + 100 \cdot 20 \cdot 75 + 100 \cdot 20 \cdot 75}{150 \cdot 20 + 100 \cdot 20 + 100 \cdot 20} = 75 \text{ mm}$$

$$y_c = \frac{\sum A_i y_i}{\sum A_i} = \frac{150 \cdot 20 \cdot 10 + 100 \cdot 20 \cdot 70 + 100 \cdot 20 \cdot 130}{150 \cdot 20 + 100 \cdot 20 + 100 \cdot 20} = 61,42 \text{ mm}$$



**Fig. 3.16.**

➤ se calculează momentele de inerție în raport cu axele centrale Cx și Cy:

$$J_x = \frac{150 \cdot 20^3}{12} + 150 \cdot 20 \cdot 51,42^2 + \frac{20 \cdot 100^3}{12} + 20 \cdot 100 \cdot 8,58^2 + \frac{100 \cdot 20^3}{12} + 100 \cdot 20 \cdot 68,58^2 = 19319048,13 \text{ mm}^4$$

$$J_y = \frac{20 \cdot 150^3}{12} + \frac{100 \cdot 20^3}{12} + \frac{20 \cdot 100^3}{12} = 7358333,3 \text{ mm}^4$$

$$J_{xy} = 0$$

deoarece figura prezintă simetrie, atunci  $J_1 = J_x$  și  $J_2 = J_y$ .

➤ razele de inerție se calculează ținând seama de relațiile de definiție

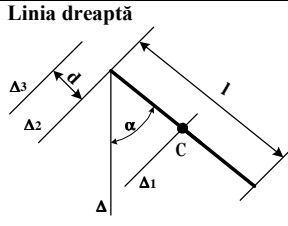
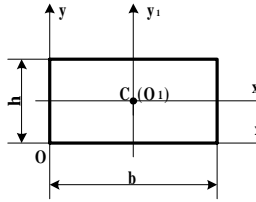
$$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{A}} = 52.5 \text{ mm}; \quad i_y = \sqrt{\frac{J_y}{A}} = 32.4 \text{ mm}$$

**Observația 3.9:**

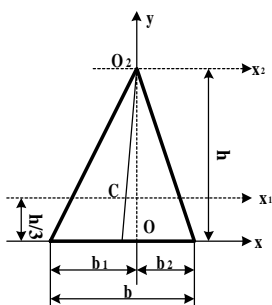
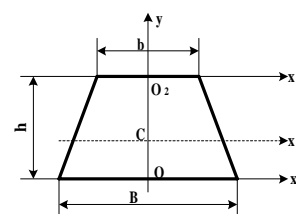
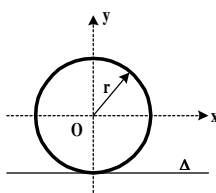
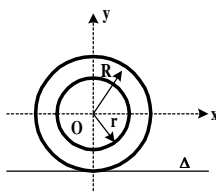
Calculul momentelor de inerție în raport cu un sistem de axe de coordonate legat de centrul de masă se poate face folosind relațiile de definiție.

Pentru bare, plăci și corpuri având forme mai mult sau mai puțin regulate și care se folosesc frecvent în aplicațiile tehnice, relațiile de calcul sunt date în tabelul 3.3.

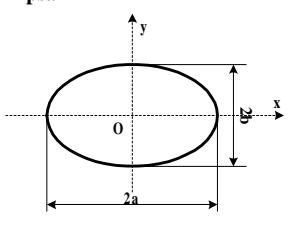
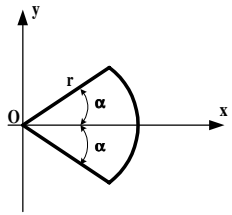
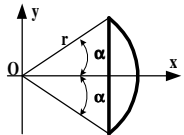
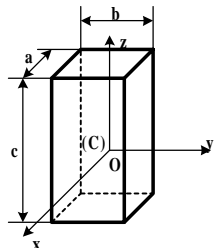
**Tabelul 3.3.** Momente de inerție

FIGURA ȘI SISTEMUL DE COORDONATE	Axa	MOMENTUL DE INERȚIE	
		GEOMETRIC	MECANIC
<b>Linia dreaptă</b> 	$\Delta_2$	$\frac{l^3}{3}$	$M \frac{l^2}{3}$
	$\Delta_1$	$\frac{l^3}{12}$	$M \frac{l^2}{12}$
	$\Delta$	$\frac{l^3}{3} \sin^2 \alpha$	$M \frac{l^3}{3} \sin^2 \alpha$
	$\Delta_3$	$\frac{1}{3} (3d^2 + 3dl + l^2)$	$M \left( d^2 + dl + \frac{l^2}{3} \right)$
<b>Dreptunghi</b> 	$O_1x_1$	$\frac{1}{12}bh^3$	$\frac{1}{12}Mh^2$
	$O_1y_1$	$\frac{1}{12}b^3h$	$\frac{1}{12}Mb^2$
	$Ox$	$\frac{1}{3}bh^3$	$\frac{1}{3}Mh^2$
	$Oy$	$\frac{1}{3}b^3h$	$\frac{1}{3}Mb^2$

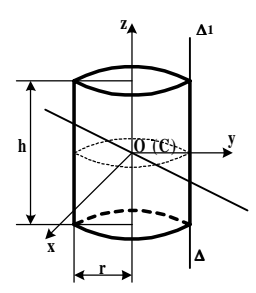
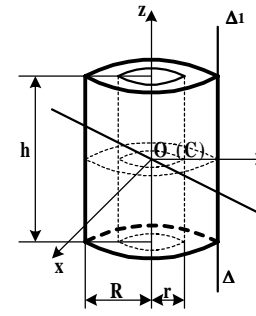
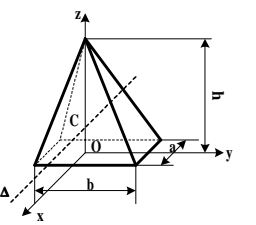
Tabelul 3.3: continuare

FIGURA ȘI SISTEMUL DE COORDONATE	Axa	MOMENTUL DE INERȚIE	
		GEOMETRIC	MECANIC
<b>Triunghi</b> 	Ox	$\frac{1}{12}bh^3$	$\frac{1}{6}Mh^2$
	Cx <sub>1</sub>	$\frac{1}{36}bh^3$	$\frac{1}{18}Mh^2$
	O <sub>2</sub> x <sub>2</sub>	$\frac{1}{4}bh^3$	$\frac{1}{2}Mh^2$
		$\frac{1}{12}(b_1^3 + b_2^3)h$	$\frac{M}{6b}(b_1^3 + b_2^3)$
<b>Trapez isoscel</b> 	Ox	$\frac{h^3}{12}(B + 3b)$	$\frac{Mh^2}{6} \frac{B + 3b}{B + b}$
	O <sub>2</sub> x <sub>2</sub>	$\frac{h^3}{12}(3B + b)$	$\frac{Mh^2}{6} \frac{3B + b}{B + b}$
	Cx <sub>1</sub>	$\frac{h^3}{36} \frac{B^2 + 4Bb + b^2}{B + b}$	$\frac{Mh^2}{18} \frac{B^2 + 4Bb + b^2}{(B + b)^2}$
	Oy	$\frac{h}{48} \frac{B^4 - b^4}{B - b}$	$\frac{M}{24}(B^2 + b^2)$
<b>Cerc</b> 	O	$\frac{\pi r^4}{2}$	$\frac{Mr^2}{2}$
	Ox Oy	$\frac{\pi r^4}{4}$	$\frac{Mr^2}{4}$
	Δ	$\frac{5}{4}\pi r^4$	$\frac{5}{4}Mr^2$
<b>Coroană circulară</b> 	O	$\frac{\pi}{2}(R^4 - r^4)$	$\frac{M}{2}(R^2 + r^2)$
	Ox Oy	$\frac{\pi}{4}(R^4 - r^4)$	$\frac{M}{4}(R^2 + r^2)$

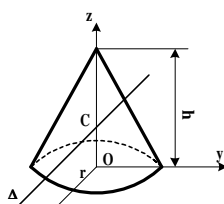
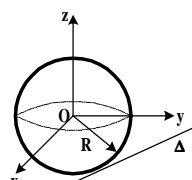
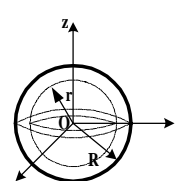
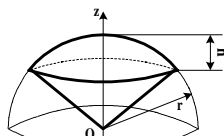
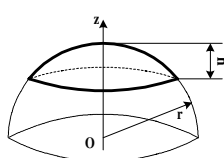
Tabelul 3.3: continuare

FIGURA ȘI SISTEMUL DE COORDONATE	Axa	MOMENTUL DE INERȚIE	
		GEOMETRIC	MECANIC
<b>Elipsa</b> 	Ox	$\frac{\pi}{4}ab^3$	$\frac{M}{4}b^2$
	Oy	$\frac{\pi}{4}a^3b$	$\frac{M}{4}a^2$
<b>Sector circular</b> 	Ox	$\frac{r^4}{8}(2\alpha - \sin 2\alpha)$	$\frac{Mr^2}{4}\left(1 - \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha}\right)$
	Oy	$\frac{r^4}{8}(2\alpha + \sin 2\alpha)$	$\frac{Mr^2}{4}\left(1 + \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha}\right)$
<b>Segment de cerc</b> 	Ox	$\frac{r^4}{8}\left(2\alpha - \frac{4\sin 2\alpha}{3} + \frac{\sin 4\alpha}{6}\right)$	$\frac{Mr^2}{4}\left[1 - \frac{2\sin 2\alpha - \sin 4\alpha}{6(2\alpha - \sin 2\alpha)}\right]$
	Oy	$\frac{r^4}{8}\left(2\alpha - \frac{\sin 4\alpha}{2}\right)$	$\frac{Mr^2}{4}\left[1 + \frac{2\sin 2\alpha - \sin 4\alpha}{2(2\alpha - \sin 2\alpha)}\right]$
<b>Paralelipiped</b> 	Ox	$\frac{abc}{12}(b^2 + c^2)$	$\frac{M}{12}(b^2 + c^2)$
	Oy	$\frac{abc}{12}(c^2 + a^2)$	$\frac{M}{12}(c^2 + a^2)$
	Oz	$\frac{abc}{12}(a^2 + b^2)$	$\frac{M}{12}(a^2 + b^2)$

Tabelul 3.3: continuare

FIGURA ȘI SISTEMUL DE COORDONATE	Axa	MOMENTUL DE INERȚIE	
		GEOMETRIC	MECANIC
<b>Cilindru</b> 	Oz	$\frac{\pi r^4 h}{2}$	$\frac{Mr^2}{2}$
	Ox Oy Δ	$\frac{\pi r^2 h}{12} (3r^2 + h^2)$	$\frac{M}{12} (3r^2 + h^2)$
	Δ <sub>I</sub>	$\frac{3}{2} \pi r^4 h$	$\frac{3}{2} Mr^2$
<b>Cilindru gol</b> 	Oz	$\frac{\pi h}{2} (R^4 - r^4)$	$\frac{M}{2} (R^2 + r^2)$
	Ox Oy Δ	$\frac{\pi (R^2 - r^2) h}{4} \left( R^2 + r^2 + \frac{h^2}{3} \right)$	$\frac{M}{12} (3R^2 + 3r^2 + h^2)$
	Δ <sub>I</sub>	$\frac{3\pi h}{2} (3R^4 - 2R^2 r^2 - r^4)$	$\frac{M}{2} (3R^2 + r^2)$
<b>Piramidă dreptunghiulară</b> 	Oz	$\frac{abh}{60} (a^2 + b^2)$	$\frac{M}{20} (a^2 + b^2)$
	Δ	$\frac{abh}{60} \left( b^2 + \frac{3h^2}{4} \right)$	$\frac{M}{80} (4b^2 + 3h^2)$
	Ox	$\frac{abh}{60} (b^2 + 2h^2)$	$\frac{M}{20} (b^2 + 2h^2)$

Tabelul 3.3: continuare

FIGURA ȘI SISTEMUL DE COORDONATE	Axa	MOMENTUL DE INERȚIE	
		GEOMETRIC	MECANIC
<b>Con circular drept</b> 	Oz	$\frac{\pi}{10} r^4 h$	$\frac{3}{10} M r^2$
	$\Delta$	$\frac{\pi}{20} r^2 h \left( r^2 + \frac{h^2}{4} \right)$	$\frac{3}{20} M \left( r^2 + \frac{h^2}{4} \right)$
<b>Sferă</b> 	O	$\frac{4}{5} \pi R^5$	$\frac{3}{5} M R^2$
	Oz Ox Oy	$\frac{8}{15} \pi R^5$	$\frac{2}{5} M R^2$
	$\Delta$	$\frac{28}{15} \pi R^5$	$\frac{7}{5} M R^2$
<b>Sferă goală</b> 	O	$\frac{4}{5} \pi (R^5 - r^5)$	$\frac{3}{5} M \frac{R^5 - r^5}{R^3 - r^3}$
	Oz Ox Oy	$\frac{8\pi}{15} (R^5 - r^5)$	$\frac{2}{5} M \frac{R^5 - r^5}{R^3 - r^3}$
<b>Sector sferic</b> 	Oz	$\frac{2\pi}{15} r^2 h^2 (3r - h)$	$\frac{M}{5} h (3r - h)$
<b>Segmentul de sferă</b> 	Oz	$\frac{\pi h^3}{30} (20r^2 - 15rh + 3h^2)$	$\frac{Mh(20r^2 - 15rh + 3h^2)}{10(3r - h)}$



***NOȚIUNI DE GEOMETRIA MASELOR***

---

## Partea a doua

### STATICA

Așa cum s-a arătat în Capitolul 1, *statica* este acea parte a mecanicii care se ocupă cu studiul sistemelor de forțe care-și fac echilibrul, precum și cu studiul modalităților de reducere a acestor sisteme de forțe la sisteme echivalente.

#### CAPITOLUL 4

##### MĂRIMI ȘI ACȚIUNI MECANICE

##### 4.1. PRINCIPIILE MECANICII

Așa cum s-a menționat și în Capitolul 1, este meritul incontestabil al matematicianului, fizicianului și astronomului englez *Isaac Newton* de a fi expus în mod sistematic, în lucrarea sa "*Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*" ("Principiile matematice ale filozofiei naturale"), noțiunile și *principiile mecanicii clasice* – care se constituie azi ca fundament al obiectului de studiu al mecanicii newtoniene.

Newton a enunțat legile mecanicii sub următoarea formă:

*Legea I: Orice corp își păstrează starea de repaus sau de mișcare în linie dreaptă dacă nu este constrâns de forțe imprimabile să-și schimbe starea.*

*Legea a II-a: Variația mișcării este proporțională cu forța motoare imprimată și este dirijată după linia dreaptă în lungul căreia este imprimată forța.*

*Legea a III-a: Reacțiunea este întotdeauna contrară și egală cu acțiunea; sau, acțiunile reciproce a două corpuri sunt întotdeauna egale și dirijate în sensuri contrarii.*

Evoluția în timp a științelor, acumularea sistematică a cunoștințelor în toate domeniile mecanicii, permite azi, reformularea legilor mecanicii postulate de Newton, într-o accepțiune modernă, conformă celor mai recente descoperiri și realizări ale mecanicii, ca ramură a științelor naturii, astfel:

*Legea I: Există cel puțin un sistem de referință în raport cu care un punct material își păstrează starea de repaus sau de mișcare rectilinie și uniformă, dacă nu este constrâns de forțe imprimate să-și schimbe starea.*

*Legea a II-a: Derivata în raport cu timpul a impulsului unui punct material liber este egală cu forța imprimată punctului material.*

Această lege se scrie

$$\frac{d(m\bar{v})}{dt} = m \frac{d\bar{v}}{dt} = m\bar{a} = \bar{F} \quad (4.1)$$

în care  $\bar{v}$  reprezintă vectorul viteză a cărui mărime este exprimată în [m/s],  $\bar{a}$  reprezintă vectorul accelerație a cărui mărime este exprimată în [m/s<sup>2</sup>] iar m reprezintă masa punctului material exprimată în [kg].

*Legea a III-a: Acțiunile reciproce a două puncte materiale libere sunt egale în modul, având ca suport dreapta ce unește cele două puncte și sensurile opuse.*

*Principiul paralelogramului: Un punct material liber acționat simultan de două forțe, se mișcă tot așa*

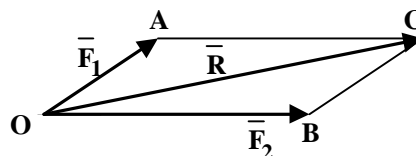


Fig. 4.1.

*ca și când asupra lui ar acționa o singură forță, având direcția, sensul și modulul diagonalei paralelogramului care are ca laturi cele două forțe.*

#### 4.2. MODELELE TEORETICE ALE MECANICII

În mecanică, procesul de studiu al unui fenomen începe printr-o serie de ipoteze și aproximații simplificatoare asupra structurii, însușirilor, formei și dimensiunilor domeniilor materiale analizate.

Pentru simplificarea și comoditatea studiului, mecanica folosește un număr de concepte, cunoscute sub numele de modele teoretice. Alegerea corectă a unui model trebuie dovedită de corespondența între rezultatele calculului matematic și rezultatele obținute experimental.

În mecanică se folosesc ca modele teoretice:

➤ *punctul material*, model care se aplică acelor domenii materiale ale căror dimensiuni sunt neglijabile în raport cu distanțele dintre ele și a căror formă nu joacă practic nici un rol în desfășurarea mișcării. Acest model are ca elemente caracteristice punctul geometric, ca reprezentant al poziției domeniului material și masa, ca mărime ce caracterizează inerția domeniului considerat.

➤ *linia materială*, model care se aplică acelor domenii materiale la care două dintre dimensiuni, lățimea și grosimea, sunt relativ mici în raport cu lungimea și nu joacă practic nici un rol în desfășurarea mișcării. Acest model are ca elemente caracteristice o linie geometrică care poate fi dreaptă sau curbă, ca reprezentant al axei domeniului material și o masă distribuită pe unitatea de lungime ca mărime ce caracterizează inerția domeniului considerat. Liniile materiale pot fi bare dacă opun rezistență la încovoiere sau fire dacă nu opun rezistență la încovoiere.

➤ *suprafața materială*, model care se aplică acelor domenii materiale la care una dintre dimensiuni, grosimea, este relativ mică în raport cu lungimea și lățimea și nu joacă practic nici un rol în desfășurarea mișcării. Acest model are ca elemente caracteristice o suprafață geometrică, plană sau curbă, ca reprezentant al suprafeței mediane a domeniului material și o masă distribuită pe unitatea de arie ce caracterizează inerția domeniului considerat. Suprafețele materiale pot fi plăci, dacă opun rezistență la încovoiere, sau membrane dacă nu opun rezistență la încovoiere.

➤ *corpul material*, model care se aplică domeniilor materiale la care cele trei dimensiuni, lungimea, lățimea și grosimea, au ordine de mărime comparabile. Acest model are ca elemente caracteristice volumul geometric și o masă distribuită pe unitatea de volum ca o caracteristică a inerției domeniului material considerat. Corpurile materiale pot fi deformabile sau nedeformabile după cum distanțele dintre punctele care le alcătuiesc sunt variabile în timp sau nu. (Corpurile materiale se numesc solide rigide dacă rămân nedeformate la acțiunile ce tind să le schimbe forma).

➤ *mediul continuu* sau continuul material, model în care se consideră că întregul spațiu ocupat de domeniul material este umplut cu substanță, deși este bine cunoscută structura atomică discontinuă a corpurilor.

### **4.3. LEGĂTURI MECANICE**

#### **Definiția 4.1:**

Se numește *legătură mecanică* a unui sistem mecanic, orice restricție de natură geometrică impusă sistemului considerat sau uneia din părțile sale componente.

*Clasificarea* legăturilor mecanice are la bază dublul aspect geometric (referitor la limitarea mobilității, la forma zonei de

contact în cazul legăturilor prin contact direct) și fizic (referitor la apariția forțelor de legătură).

Se disting:

- din punct de vedere geometric:
  - ✓ legături interioare sau exterioare;
  - ✓ legături unilaterale sau bilaterale;
  - ✓ legături discrete sau continue.
- din punct de vedere fizic:
  - ✓ legături lucii sau aspre;
  - ✓ legături rigide sau deformabile.

**Definiția 4.2:**

O legătură mecanică se numește *interioară* dacă restricțiile de natură geometrică impuse sistemului mecanic considerat, limitează numai pozițiile reciproce ale părților sale componente și nu pozițiile acestuia luat în ansamblul său.

De exemplu, solidul rigid liber considerat ca un sistem de puncte materiale obligate să rămână la distanțe invariabile unul de celălalt, este un sistem mecanic cu legături interioare.

**Definiția 4.3:**

O legătură mecanică se numește *exterioară* dacă restricțiile de natură geometrică impuse sistemului mecanic considerat, limitează pozițiile acestuia în ansamblul său.

Ca exemplu poate fi considerat sistemul alcătuit dintr-un număr oarecare de puncte materiale, fiecare dintre ele fiind obligat să rămână în contact cu o suprafață fixă.

**Definiția 4.4:**

O legătură mecanică se numește *unilaterală* dacă se pot da sistemului mecanic considerat anumite deplasări, prin care partea legată a acestuia poate părăsi legătura.

De exemplu, pentru un corp rezemat pe un plan există deplasări care se pot da corpului considerat astfel încât acesta să se desprindă de pe plan.

**Definiția 4.5:**

O legătură mecanică se numește *bilaterală* dacă nu se pot da sistemului mecanic considerat nici un fel de deplasări, prin intermediul cărora partea legată a acestuia să poată părăsi legătura.

Ca exemplu poate fi considerată o culisă care se deplasează pe o tijă rigidă (nu există nici o deplasare a culisei prin care aceasta să se poată desprinde de tijă).

**Definiția 4.6:**

O legătură mecanică prin contact direct se numește *punctuală* sau *liniară* dacă aria suprafeței de contact între sistemul mecanic considerat și celălalt element al legăturii, tinde către zero.

Ca exemplu se poate considera o bilă sau un cilindru așezat pe un plan.

**Definiția 4.7:**

O legătură mecanică prin contact direct se numește *continuuă* dacă realizează un contact neîntrerupt de-a lungul unei suprafețe sau curbe între sistemul mecanic considerat și celălalt element al legăturii.

**Definiția 4.8:**

O legătură mecanică se numește *ideală* sau *lucie* dacă forțele cu care legătura acționează asupra sistemului mecanic considerat nu au componente tangențiale (componente situate în planul tangent la suprafață, când legătura este o rezemare pe o suprafață sau pe tangenta la curbă, când legătura este o rezemare pe o curbă).

Această denumire este în corespondență cu faptul că cele două elemente aflate în contact (sistemul mecanic și curba sau suprafața) nu au asperități (sunt lucii).

**Definiția 4.9:**

O legătură mecanică se numește *aspră* dacă forțele cu care legătura acționează asupra sistemului mecanic considerat au componente tangențiale ( numite *forțe de frecare*).

**4.4. ECHILIBRU MECANIC.  
GRADE DE LIBERTATE**

**Definiția 4.10:**

*Condițiile de echilibru* ale unui sistem mecanic oarecare, sunt relațiile cele mai generale prin care se exprimă faptul că acțiunea tuturor forțelor aplicate sistemului considerat nu influențează starea de mișcare rectilinie uniformă sau de repaus existentă înainte de aplicarea lor (se mai spune că sistemul de forțe aplicate are efect nul asupra sistemului mecanic).

Forțele care acționează direct asupra sistemului mecanic considerat, se numesc *forțe active*.

După cum se va vedea în capitolele următoare, legăturile mecanice acționează asupra sistemelor mecanice printr-o serie de forțe, numite *forțe de legătură* sau *reacțiuni*.

**Axioma legăturilor:**

Dacă un sistem mecanic este supus anumitor restricții de natură geometrică (sistem mecanic supus la legături ), acestea se înlocuiesc prin elemente mecanice (forțe și momente) denumite *elemente mecanice de legătură sau reacțiuni*, și după introducerea cărora, sistemul considerat se tratează ca și cum ar fi liber.

Ca exemplu pentru ilustrarea acestei axiome poate fi considerat studiul echilibrului unui punct material greu aflat pe o masă orizontală. Punctul material este acționat numai de



greutatea proprie, dirijată după verticala descendentă. S-ar părea că principiul inerției este contrazis, căci el afirmă că starea de repaus a unui domeniu material nu este posibilă decât dacă sistemul de forțe care acționează punctul este echivalent cu sistemul mecanic nul. Contradicția este însă numai aparentă, căci asupra punctului material analizat mai acționează și reacțiunea masei, egală și de sens contrar greutatei punctului, care alcătuiește împreună cu aceasta din urmă un sistem mecanic nul.

Sistemele mecanice cu care se lucrează în mecanică, pot fi *static determinate* sau *static nedeterminate* după cum, cu ajutorul ecuațiilor de echilibru, se pot determina sau nu, toate forțele de legătură ca funcții de forțele exterioare direct aplicate.

**Definiția 4.11:**

Numărul parametrilor scalari independenți între ei (unghiuri sau lungimi) care determină poziția în spațiu a unui sistem material la un moment dat, poartă numele de *grade de libertate* ale sistemului considerat

De exemplu, un punct material liber în spațiu are trei grade de libertate, deoarece poziția sa este determinată de trei parametri scalari independenți – coordonatele sale.

Un continuum material deformabil are o infinitate de grade de libertate.

**4.5. GENERALITĂȚI PRIVIND  
ACȚIUNILE MECANICE**

**Definiția 4.12:**

Se numește *acțiune mecanică* orice cauză susceptibilă de a menține un corp în stare de repaus, de a genera o mișcare sau de a deforma un corp.

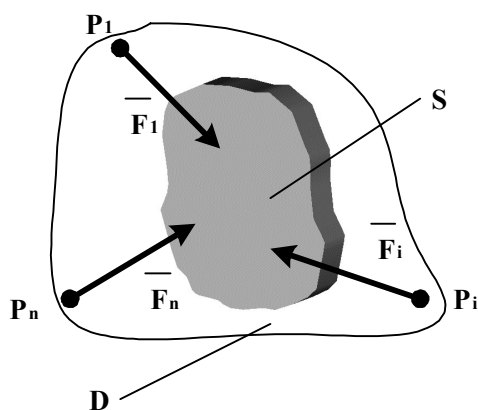
Acțiunile mecanice sunt de două categorii:

- acțiuni mecanice la distanță: câmpul gravitațional, câmpul electromagnetic;
- acțiuni mecanice prin contact: legăturile pe o suprafață.

**Definiția 4.13:**

O *forță* este o acțiune mecanică reprezentată printr-un vector legat.

Considerăm un sistem mecanic (S) care suportă din partea unui domeniu material (D) o acțiune mecanică reprezentată printr-un sistem de  $n$  forțe,  $\{\vec{F}_i\}$ , cu punctele de aplicație  $P_i$  (Figura 4.2).



**Fig. 4.2.**

Global, această acțiune se condensează într-un punct  $O$ , al sistemului mecanic, prin doi vectori:

$$\begin{aligned}\vec{R}_O &= \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \\ \vec{M}_O &= \sum_{i=1}^n \overrightarrow{OP_i} \times \vec{F}_i\end{aligned}\tag{4.2}$$

**Definiția 4.14:**

Spunem că acțiunea mecanică a domeniului material (D) asupra sistemului mecanic (S) este echivalentă în punctul O, numit punct de reducere, cu un *torsor*.

$$\tau_o = (\overline{R}_o, \overline{M}_o) = \left( \sum_{i=1}^n \overline{F}_i, \sum_{i=1}^n \overline{OP}_i \times \overline{F}_i \right) \quad (4.3)$$

**Observația 4.1:**

Orice acțiune mecanică fiind caracterizată de un torsor, posedă toate proprietățile acestuia (vezi Capitolul 2).

#### 4.6. SARCINI: DEFINIȚII GENERALE

Din punctul de vedere al domeniului de extindere al unui sistem mecanic căruia îi este transmisă acțiunea altui sistem mecanic, sarcinile pot fi concentrate (punctuale) sau distribuite (continue).

**Definiția 4.15:**

Dacă toate dimensiunile regiunii unui sistem mecanic pe care se transmite sarcina sunt foarte mici, și deci, pot fi neglijate în raport cu restul dimensiunilor sale, localizarea sarcinii respective este considerată, prin aproximație, punctuală și ea este numită *sarcină concentrată sau punctuală*.

**Definiția 4.16:**

Dacă cel puțin una dintre cele trei dimensiuni ale regiunii pe care este transmisă sarcina nu poate fi neglijată, sarcina se numește *distribuită sau continuă* ea fiind considerată în acest caz ca fiind transmisă în mod neîntrerupt regiunii respective.

Distribuția de sarcină poate fi liniară, superficială sau volumică, după cum dimensiunile care pot fi neglijate sunt două, una, respectiv nici una.

Sarcinile distribuite alcătuiesc un câmp vectorial în interiorul domeniului de transmitere a lor.

Reprezentarea și notarea sarcinilor concentrate și distribuite se realizează în modul următor:

- forțele concentrate se reprezintă prin vectori finiți;
- cuplurile concentrate se reprezintă prin vectorii moment respectivi, care sunt, de asemenea, finiți;
- forțele distribuite: forța infinit mică are valoarea  $\bar{p}dl$ ,  $\bar{p}ds$  sau  $\bar{p}dv$  după cum acționează asupra elementului de lungime  $dl$  al liniei  $L$ , elementului de arie  $ds$  al suprafeței  $S$  sau elementului de volum  $dv$  al corpului  $V$  și în care  $\bar{p}$  este un vector finit (Figura 4.3).
- cuplurile distribuite: momentul infinit mic are valoarea  $\bar{m}dl$ ,  $\bar{m}ds$  sau  $\bar{m}dv$  după cum acționează asupra elementului de lungime  $dl$  al liniei  $L$ , elementului de arie  $ds$  al suprafeței  $S$  sau elementului de volum  $dv$  al corpului  $V$  și în care  $\bar{m}$  este un vector finit (Figura 4.3).

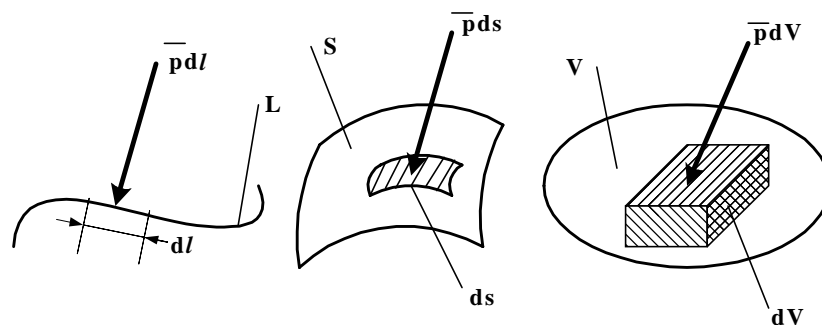


Fig. 4.3.

**Observația 4.2:**

Vectorii  $\bar{p}$  și  $\bar{m}$  sunt funcții continue pentru punctul în jurul căruia s-a separat elementul de lungime, de suprafață sau de volum. Dacă ei sunt constanți, adică nu depind de poziția în spațiu a elementului considerat, sarcinile respective se numesc

uniform distribuite sau uniform repartizate.

Vectorii rezultanți  $\bar{F}$  și  $\bar{M}$  care acționează asupra unei porțiuni finite de linie, suprafață sau volum se obțin prin integrare:

$$\begin{aligned}\bar{F} &= \int_L \bar{p} dl; & \bar{M} &= \int_L \bar{m} dl; \\ \bar{F} &= \int_S \bar{p} ds; & \bar{M} &= \int_A \bar{m} ds; \\ \bar{F} &= \int_V \bar{p} dv; & \bar{M} &= \int_V \bar{m} dv;\end{aligned}\tag{4.4}$$

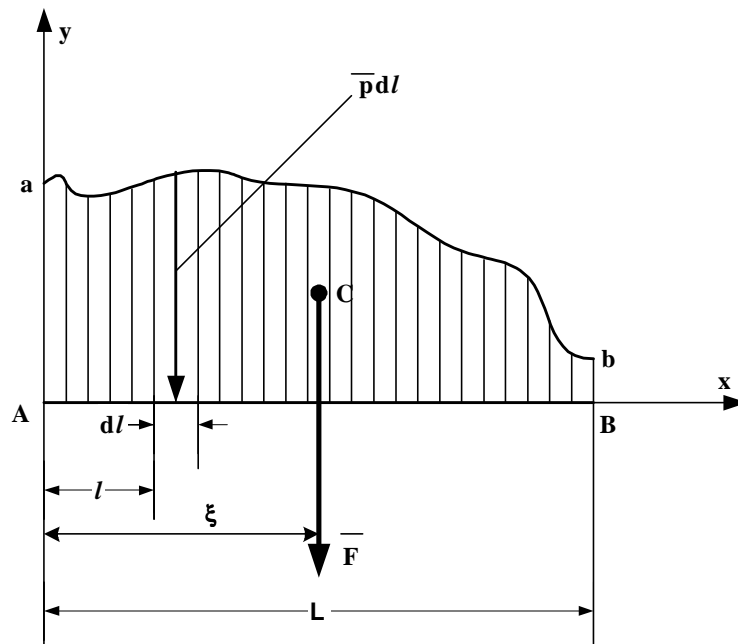
În scrierea ecuațiilor de echilibru, sarcinile distribuite pot fi înlocuite în anumite cazuri prin *sarcinile concentrate echivalente* (sarcini punctuale care au același efect ca și sarcina distribuită înlocuită) și care sunt componentele torsorului de reducere ale sarcinii distribuite.

În cazul sarcinilor distribuite liniar și superficial când curba, respectiv suprafața, sunt o dreaptă, respectiv un plan și intensitatea  $\bar{p}$  a sarcinii păstrează o direcție fixă normală pe dreaptă sau plan, se obișnuiește următoarea reprezentare sugestivă: se figurează vectorii  $\bar{p} dl$  sau  $\bar{p} ds$  cu vârfurile în punctele situate pe corpul respectiv; originile acestor vectori se dispun atunci după o curbă plană (sau porțiuni de curbe plane), respectiv după o suprafață oarecare (sau porțiuni de suprafață) denumite *curbă de încărcare* sau *suprafață de încărcare*.

În continuare, se prezintă două cazuri particulare de încărcări cu sarcini continue:

➤ **forțe coplanare, distribuite liniar**

În Figura 4.4 se consideră linia AB având lungimea  $L$ . Sarcina care revine unei porțiuni de lungime infinit mică este  $\bar{p} dl$ .



**Fig. 4.4.**

Sistemul de forțe paralele format, se reduce la o rezultantă unică (sarcina concentrată echivalentă) având valoarea

$$\bar{F} = \int_0^L \bar{p} dl \quad (4.5)$$

Cum modulul vectorului  $\bar{p}$  este numeric egal cu ordonata liniei de încărcare ab, atunci rezultă

$$\bar{p} = -p\bar{j} = -y\bar{j} \quad (4.6)$$

și deci,

$$\bar{F} = -\bar{j} \int_0^L y dl = -A\bar{j} \quad (4.7)$$

în care,  $A$  reprezintă aria suprafeței ABab.

Se poate spune, deci, că modulul sarcinii echivalente este egal cu aria suprafeței de încărcare.

Poziția sarcinii echivalente (axa centrală) se determină cu relația

$$\xi = \frac{\int_0^L x p dl}{\int_0^L p dl} = \frac{A x_c}{A} = x_c \quad (4.8)$$

$C$  fiind punctul său de aplicație și reprezentând centrul de masă al suprafeței ABab.

În Figura 4.5 sunt prezentate câteva cazuri particulare de sarcini distribuite liniar.

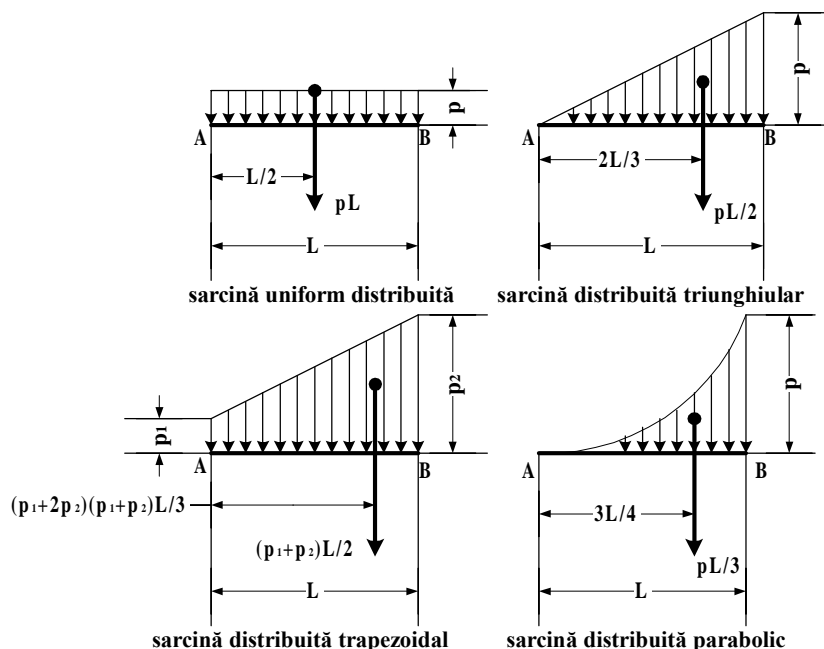


Fig. 4.5.

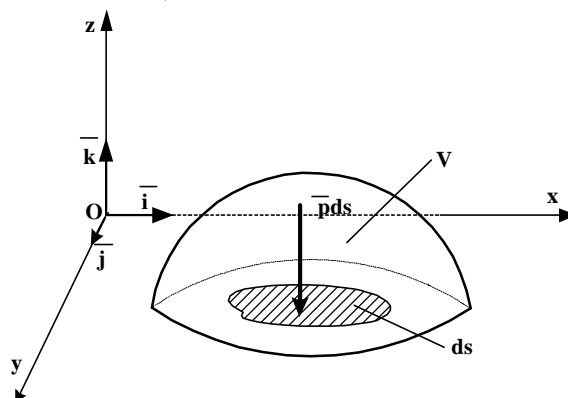
➤ **forțe distribuite perpendicular pe suprafețe plane**

În Figura 4.6 se consideră o suprafață plană, având aria  $S$ . Sarcina distribuită care revine porțiunii de suprafață infinit mică este  $\bar{p}ds$ .

Sistemul de forțe paralele format, se reduce la o rezultantă unică (sarcina concentrată echivalentă) având valoarea

$$\bar{F} = \int_S \bar{p}ds \quad (4.9)$$

Cum modulul vectorului  $\bar{p}$  este numeric egal cu cotele suprafeței de încărcare, atunci rezultă



**Fig. 4.6.**

$$\bar{p} = -p\bar{k} = -z\bar{k} \quad (4.10)$$

și deci,

$$\bar{F} = -\bar{k} \int_S zds = -V\bar{k} \quad (4.11)$$

în care,  $V$  reprezintă volumul determinat de suprafața de încărcare.

Se poate spune, deci, că modulul sarcinii echivalente este egal cu volumul determinat de suprafața de încărcare.



Poziția sarcinii echivalente (axa centrală) se determină cu relația

$$\xi = \frac{\int_S x p ds}{\int_S p ds} = \frac{V x_C}{V} = x_C; \quad \eta = \frac{\int_S y p ds}{\int_S p ds} = \frac{V y_C}{V} = y_C \quad (4.12)$$

C fiind punctul său de aplicație și reprezentând centrul de masă al volumului determinat de suprafața de încărcare.

## CAPITOLUL 5

### STATICA PUNCTULUI MATERIAL

Așa cum s-a văzut în capitolele anterioare, mecanica utilizează, ca instrumente de lucru, modele schematizate care rețin numai caracteristicile esențiale ale domeniilor materiale pe care le descriu și care le fac proprii pentru calculul matematic.

Un prim model teoretic, frecvent utilizat, este cel al *punctului material*,  $M$ , model care se aplică acelor domenii materiale ale căror dimensiuni sunt neglijabile în raport cu distanțele dintre ele și a căror formă nu joacă practic nici un rol în desfășurarea mișcării. Acest model are ca elemente caracteristice punctul geometric, ca reprezentant al poziției domeniului material și masa, ca mărime ce caracterizează inerția domeniului considerat.

Este știut faptul că, pentru a defini complet poziția unui punct material,  $M$ , trebuie cunoscut numărul gradelor de libertate.

Din punctul de vedere al poziției pe care o poate ocupa în spațiu, punctul material este:

- liber (când poate ocupa orice poziție în spațiu);
- supus la legături (când este obligat să respecte anumite restricții geometrice).

Dimensiunile punctului material,  $M$ , fiind neglijabile, forțele care acționează asupra lui se constituie în sisteme de vectori legați având dreptele suport concurente în punctul material (ceea ce se traduce prin faptul că punctele de aplicație ale forțelor coincid cu punctul material considerat și nu pot fi schimbate).

Problemele privind statica punctului material liber sunt de mai multe categorii, după cum urmează:

- se consideră cunoscute forțele care acționează asupra punctului material și se cere să se determine poziția de echilibru a acestuia. Necunoscutele problemei sunt, în acest caz,

coordonatele care definesc poziția punctului material în spațiu, date în raport cu diferite sisteme de referință (de exemplu, coordonatele  $x, y, z$  în raport cu sistemul cartezian triortogonal).

➤ se consideră cunoscută poziția de echilibru a punctului material și se cere să se determine forțele care trebuie să acționeze asupra acestuia pentru ca poziția de echilibru să nu se modifice. Necunoscutele problemei sunt, în acest caz, mărimile și direcțiile forțelor.

**Observația 5.1:**

Problemele din această categorie prezintă, în general, nedeterminări pentru a căror înlăturare este necesară precizarea anumitor condiții pe care trebuie să le îndeplinească forțele.

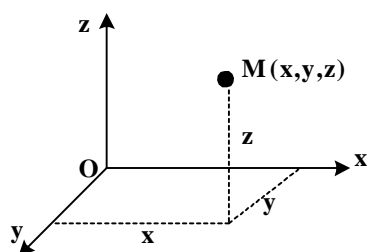
➤ se cunosc unele din caracteristicile forțelor care acționează asupra punctului material și ale poziției de echilibru a acestuia și se cere să se determine celelalte caracteristici.

**5.1. STATICA PUNCTULUI MATERIAL LIBER**

**Definiția 5.1:**

*Se numește punct material liber, punctul care, sub acțiunea unui sistem de forțe, poate ocupa orice poziție în spațiu.*

Un punct material liber în spațiu, are trei grade de libertate.



**Fig. 5.1.**

Poziția unui punct material liber este complet definită cu ajutorul a trei parametri scalari independenți, care sunt cele trei coordonate ale punctului material în spațiu, date în raport cu diferite sisteme de coordonate (de exemplu,

coordonatele  $x, y, z$  în raport cu sistemul cartezian triortogonal, Figura 5.1).

Dacă se consideră un punct material,  $M$ , asupra căruia acționează un sistem de forțe concurente se poate observa că, în conformitate cu principiul paralelogramului, acest sistem de forțe poate fi înlocuit cu o rezultantă unică. Mai mult, corespunzător principiului inerției, un punct material liber este în echilibru (își păstrează nemodificată starea de repaus sau de mișcare rectilinie uniformă) dacă asupra lui nu acționează nici o forță care să-l scoată din această stare.

*Rezultă condiția necesară și suficientă pentru ca un punct material liber să fie în echilibru sub acțiunea unui sistem de forțe concurente: rezultanta sistemului de forțe să fie nulă.*

Condiția de echilibru se scrie sub forma unei ecuații vectoriale

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i = 0 \quad (5.1)$$

care este echivalentă cu sistemul de trei ecuații scalare

$$R_x = \sum_{i=1}^n F_{xi} = 0; \quad R_y = \sum_{i=1}^n F_{yi} = 0; \quad R_z = \sum_{i=1}^n F_{zi} = 0 \quad (5.2)$$

Condiția grafică necesară și suficientă pentru ca un punct material să fie în echilibru sub acțiunea unui sistem de forțe concurente este ca poligonul forțelor să fie un poligon închis.

## 5.2. STATICA PUNCTULUI MATERIAL SUPUS LA LEGĂTURI

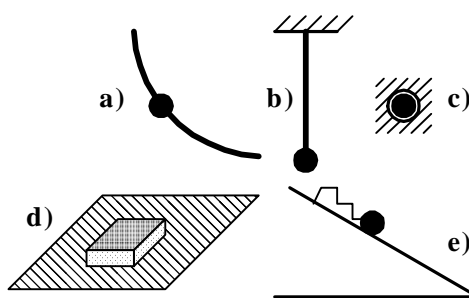
### 5.2.1. Legăturile punctului material

#### Definiția 5.2:

*Se numește punct material supus la legături, punctul care, sub acțiunea unui sistem de forțe, este obligat să ocupe anumite*

*poziții în spațiu.*

Există mai multe posibilități de restrângere a numărului pozițiilor pe care un punct material le poate ocupa în spațiu, dar o importanță deosebită o prezintă, pentru aplicațiile tehnice, acelea care impun punctului material obligația de a nu părăsi o suprafață fixă, o curbă fixă sau un punct fix (Figura 5.2).



**Fig. 5.2.**

Evident, punctul material supus la legături are un număr mai mic de grade de libertate, ca urmare a introducerii restricțiilor geometrice.

Un punct material obligat să rămână pe o suprafață materială, plană sau curbă, are două grade de libertate, poziția sa fiind complet definită cu ajutorul a doi parametri scalari independenți, care sunt cele două coordonate curbilinii ale punctului material pe suprafața considerată, date în raport cu diferite sisteme de coordonate.

Un punct material obligat să rămână pe o curbă materială, plană sau curbă, are un grad de libertate, poziția sa fiind complet definită cu ajutorul unui parametru scalar independent, care este coordonata punctului material pe curba considerată, dată în raport cu diferite sisteme de coordonate.

Un punct material obligat să rămână într-un punct fix în spațiu, nu are nici un grad de libertate.

Se consideră un punct material  $M$  aflat pe o suprafață  $[S]$  și acționat de forțe a căror rezultantă este  $\vec{R}$  (Figura 5.3). Ca urmare a existenței legăturilor care se exercită asupra punctului

material, obligându-l să rămână pe suprafața [S], nu mai este valabilă aceeași condiție de echilibru ca în cazul punctului material liber.

Pentru a rezolva problema echilibrului punctului material supus la legături, este necesar să se țină seama de **axioma legăturilor** care postulează că *orice legătură poate fi suprimată și înlocuită cu elemente corespunzătoare (forțe și momente) și care conservă efectul mecanic manifestat asupra punctului material*. În cazul punctului material considerat, legătura se înlocuiește cu reacțiunea  $\bar{R}'$ .

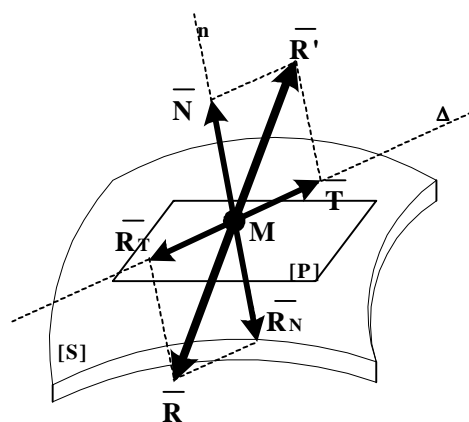


Fig. 5.3.

*Rezultă condiția necesară și suficientă pentru ca un punct material supus la legături să fie în echilibru sub acțiunea unui sistem de forțe concurente: rezultanta sistemului de forțe aplicate și a forței de legătură să fie nulă.*

Condiția de echilibru se scrie sub forma unei ecuații vectoriale

$$\bar{R} + \bar{R}' = 0 \quad (5.3)$$

care este echivalentă cu sistemul de trei ecuații scalare

$$R_x + R'_x = 0; \quad R_y + R'_y = 0; \quad R_z + R'_z = 0 \quad (5.4)$$

Condiția grafică necesară și suficientă pentru ca un punct material supus la legături să fie în echilibru sub acțiunea unui

sistem de forțe concurente este ca rezultanta sistemului de forțe aplicate,  $\bar{R}$ , și forța de legătură,  $\bar{R}'$ , să fie egale în modul și să aibă sensuri opuse.

### **5.2.2. Echilibrul punctului material supus la legături fără frecare**

#### **5.2.2.1. Punct material rezemat pe o suprafață lucie**

În Figura 5.3 s-a considerat un punct material, M, rezemat pe suprafața [S], și acționat de forțe exterioare a căror rezultantă este  $\bar{R}$ . Ca urmare a existenței legăturii care obligă punctul material să rămână pe suprafața [S] considerată lucie, fixă și nedeformabilă, a fost introdusă – în baza axiomei legăturilor – reacțiunea  $\bar{R}'$ , egală în modul și opusă ca sens rezultantei  $\bar{R}$ .

Rezultanta  $\bar{R}$  se descompune în componenta normală  $\bar{R}_N$  dirijată după direcția normalei,  $n$ , la suprafața [S] în punctul M, și în componenta tangențială  $\bar{R}_T$  dirijată după dreapta  $\Delta$  care rezultă din intersecția planului [P], tangent la suprafața [S] în punctul M, cu planul determinat de normala  $n$  și rezultanta  $\bar{R}$ .

În mod corespunzător, reacțiunea  $\bar{R}'$  se descompune, după aceleași direcții, în reacțiunea normală  $\bar{N}$  și, respectiv, în forța de frecare  $\bar{T}$ .

Având în vedere că punctul material M rămâne pe suprafața [S], se poate spune că acțiunea rezultantei normale  $\bar{R}_N$ , care tinde să îndepărteze punctul material de pe suprafața [S], este anulată de reacțiunea normală  $\bar{N}$ , deci cele două forțe sunt egale în modul și de sensuri opuse. Pe de altă parte, suprafața [S] fiind considerată lucie, fără frecare, reacțiunea tangențială  $\bar{T}$ , nu poate să apară și deci, punctul material M este supus numai acțiunii rezultantei tangențiale  $\bar{R}_T$ . Pentru asigurarea echilibrului punctului material pe suprafața considerată, trebuie îndeplinită condiția  $\bar{R}_T = 0$ .

Analizând cele prezentate anterior, se poate spune că, pentru ca un punct material să rămână în echilibru pe o suprafață lucie, este necesar ca rezultanta,  $\bar{R}$ , a forțelor date să fie dirijată după direcția normalei,  $n$ , la suprafața de sprijin.

În cazul punctului material rezemat fără frecare pe o suprafață [S] condiția de echilibru dată de relația (5.3) se scrie

$$\bar{R} + \bar{N} = 0 \quad (5.5)$$

care este echivalentă cu sistemul de trei ecuații scalare

$$R_x + N_x = 0; \quad R_y + N_y = 0; \quad R_z + N_z = 0 \quad (5.6)$$

Dacă se ține seama de faptul că suprafața [S] poate fi exprimată prin ecuația carteziană implicită  $f(x, y, z) = 0$ , atunci relațiile (5.5) și (5.6) se scriu

$$\bar{R} + \lambda \left( \frac{\partial f}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \bar{k} \right) = 0 \quad (5.7)$$

respectiv

$$\begin{aligned} R_x + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} &= 0 \\ R_y + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} &= 0 \\ R_z + \lambda \frac{\partial f}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \quad (5.8)$$

Dacă, pe lângă relațiile (5.8) se cunoaște și ecuația suprafeței,  $f(x, y, z) = 0$ , se pot determina necunoscutele,  $x, y, z$  și  $\lambda$ , dintre care, primele trei definesc poziția de echilibru a punctului pe suprafață, iar  $\lambda$  determină valoarea și sensul reacțiunii normale  $\bar{N}$ .



**Observația 5.2:**

Se amintește că reacțiunea normală a unei suprafețe dată prin ecuația  $f(x, y, z) = 0$  se poate exprima prin relația

$$\bar{N} = \lambda \nabla f = \lambda \left( \frac{\partial f}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \bar{k} \right) \text{ unde } \lambda \text{ este un parametru}$$

scalar, iar  $\nabla f = \text{grad } f$  este vectorul care definește direcția normalei  $n$  la suprafața  $[S]$  dată.

5.2.2.2. Punct material rezemat pe o curbă lucie

În Figura 5.4. s-a considerat un punct material,  $M$ , rezemat pe curba  $[C]$ , și acționat de forțe a căror rezultantă este  $\bar{R}$ . Ca urmare a existenței legăturii care obligă punctul material să rămână pe curba  $[C]$  considerată lucie, fixă și nedeformabilă, a fost introdusă – în baza axiomei legăturilor – reacțiunea  $\bar{R}'$ , egală în modul și opusă ca sens rezultantei  $\bar{R}$ .

Rezultanta  $\bar{R}$  se descompune în componenta normală  $\bar{R}_N$  dirijată după direcția normalei,  $n$ , care rezultă din intersecția planului  $[P]$ , normal la curba  $[C]$  în punctul  $M$  cu planul

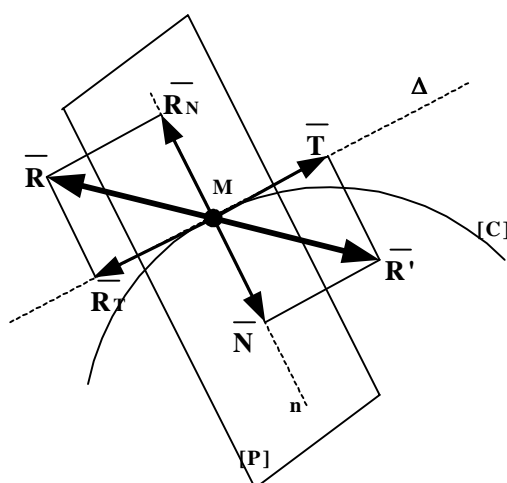


Fig. 5.4.

determinat de tangenta în  $M$  la curbă și rezultanta  $\bar{R}$  și în componenta tangențială  $\bar{R}_T$  dirijată după dreapta  $\Delta$  tangentă la curbă în punctul  $M$ .

În mod corespunzător, reacțiunea  $\bar{R}'$  se descompune, după aceleași direcții,

în reacțiunea normală  $\bar{N}$  și, respectiv, în forța de frecare  $\bar{T}$ .

Având în vedere că punctul material  $M$  rămâne pe curba  $[C]$ , se poate spune că acțiunea rezultantei normale  $\bar{R}_N$ , care tinde să îndepărteze punctul material de pe curbă, este anulată de reacțiunea normală  $\bar{N}$ , deci cele două forțe sunt egale în modul și de sensuri opuse. Pe de altă parte, curba  $[C]$  fiind considerată lucie, fără frecare, reacțiunea tangențială  $\bar{T}$ , nu poate să apară și deci, punctul material  $M$  este supus numai acțiunii rezultantei tangențiale  $\bar{R}_T$ . Pentru asigurarea echilibrului punctului material pe curba considerată, trebuie îndeplinită condiția  $\bar{R}_T = 0$ .

Analizând cele prezentate anterior, se poate spune că, pentru ca un punct material să rămână în echilibru pe o curbă lucie, este necesar ca rezultanta,  $\bar{R}$ , a forțelor date să fie dirijată după direcția normalei,  $n$ , la curbă, în punctul de sprijin.

În cazul punctului material rezemat fără frecare pe o curbă  $[C]$ , condiția de echilibru dată de relația (5.3) se scrie

$$\bar{R} + \bar{N} = 0 \quad (5.9)$$

care este echivalentă cu sistemul de trei ecuații scalare

$$R_x + N_x = 0; \quad R_y + N_y = 0; \quad R_z + N_z = 0 \quad (5.10)$$

Dacă se ține seama de considerația potrivit căreia curba  $[C]$  poate fi exprimată prin ecuațiile carteziane implicite  $f_1(x, y, z) = 0$  și  $f_2(x, y, z) = 0$ , atunci relațiile (5.9) și (5.10) se scriu

$$\bar{R} + \lambda_1 \left( \frac{\partial f_1}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial f_1}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial f_1}{\partial z} \bar{k} \right) + \lambda_2 \left( \frac{\partial f_2}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial f_2}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial f_2}{\partial z} \bar{k} \right) = 0 \quad (5.11)$$

respectiv

$$\begin{aligned} R_x + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x} &= 0 \\ R_y + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y} &= 0 \\ R_z + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \quad (5.12)$$

Dacă, pe lângă relațiile (5.8) se cunosc și ecuațiile curbei,  $f_1(x, y, z) = 0$  și  $f_2(x, y, z) = 0$ , se pot determina necunoscutele,  $x, y, z$  și  $\lambda_1, \lambda_2$ , dintre care, primele trei definesc poziția de echilibru a punctului pe curbă iar  $\lambda_1, \lambda_2$ , determină valoarea și sensul reacțiunii normale  $\bar{N}$ .

#### 5.2.2.3. Punct material fixat într-un punct

Un punct material care nu poate părăsi un anumit punct fix din spațiu rămâne în echilibru oricare ar fi forțele care-l acționează, reacțiunea  $\bar{R}'$  fiind egală în modul și de sens opus rezultantei sistemului de forțe date,  $\bar{R}$ .

Condiția de echilibru se scrie sub forma unei ecuații vectoriale

$$\bar{R} + \bar{R}' = 0 \quad (5.13)$$

care este echivalentă cu sistemul de trei ecuații scalare

$$R_x + R'_x = 0; \quad R_y + R'_y = 0; \quad R_z + R'_z = 0 \quad (5.14)$$

### 5.2.3. Echilibrul punctului material supus la legături cu frecare

#### 5.2.3.1. Forța de frecare de alunecare.

##### Legile lui Coulomb

Repetate experimente, desfășurate în diferite situații, arată că în cazul unui punct material obligat să rămână pe o curbă sau

o suprafață aspră (cu rugozitate), reacțiunea  $\bar{R}'$  are două componente (vezi Figura 5.5): reacțiunea normală  $\bar{N}$ , dirijată după direcția normalei la suprafața sau curba considerată și reacțiunea tangențială  $\bar{T}$ , numită *forță de frecare* și dirijată după direcția tangentei la suprafața sau curba considerată, în sens invers tendinței de deplasare, aplicată în punctul de sprijin al punctului material pe acestea.

Forța de frecare poate fi pusă în evidență de următoarea experiență (Figura 5.5).

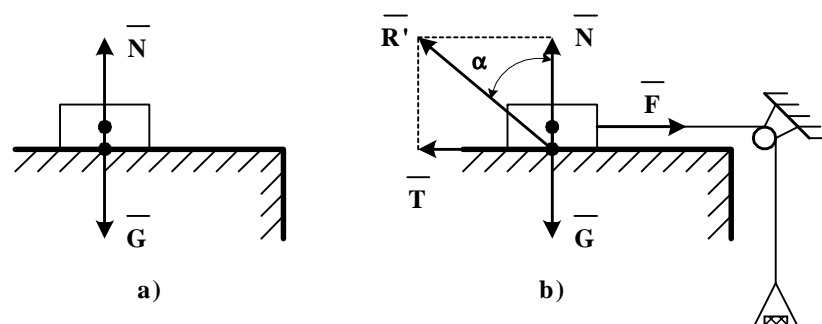


Fig. 5.5.

Se consideră un corp material de dimensiuni neglijabile, deci echivalent unui punct material, așezat pe o suprafață orizontală aspră și acționat de greutatea proprie,  $\bar{G}$ .

Cât timp punctul material rămâne în repaus pe suprafața considerată, forța de legătură este reprezentată prin reacțiunea normală  $\bar{N}$  (Figura 5.5.a).

Asupra punctului material se acționează cu o forță orizontală  $\bar{F}$  a cărei mărime poate fi variată continuu prin intermediul unui tribometru. Pe măsură ce experimentul se desfășoară, se constată că, până la o anumită valoare a mărimii forței  $\bar{F}$ , numită valoare de echilibru și notată  $\bar{F}_e$ , punctul material nu se pune în mișcare. Aceasta demonstrează că pe suprafața de contact apare o forță  $\bar{T}$ , de sens contrar tendinței

firești de deplasare a punctului material și care echilibrează acțiunea forței de tracțiune  $\bar{F}$ . Cu alte cuvinte, în această situație, reacțiunea nu mai este normală la suprafața de contact, ci este înclinată cu un anumit unghi,  $\gamma$ , în raport cu direcția normalei.

Ca atare, reacțiunea  $\bar{R}$  are două componente:

- reacțiunea normală  $\bar{N}$ , dirijată după direcția normalei la suprafața orizontală considerată;
- reacțiunea tangențială  $\bar{T}$ , numită *forță de frecare de alunecare* și caracterizată ca vector, astfel:

- mărimea este dată de relația

$$T \leq N \cdot \operatorname{tg} \alpha \quad (5.15)$$

în care  $\alpha = \gamma_{\max}$  reprezintă valoarea maximă a unghiului de înclinare,  $\gamma$ ,

- *direcția* corespunde tendinței firești de deplasare a punctului material (în planul tangent la suprafață în punctul de contact);
- *sensul* este invers sensului deplasării;
- *punctul de aplicație* este situat în punctul de contact al punctului material cu suprafața.

Cercetările experimentale efectuate de fizicianul francez Coulomb, au pus în evidență caracteristicile frecării și au condus la formularea *legilor frecării de alunecare*, cunoscute sub numele de *legile lui Coulomb*:

**1. Forța de frecare de alunecare este direct proporțională cu reacțiunea normală**

$$T \leq \mu N \quad (5.16)$$

În relația (5.16), coeficientul de proporționalitate,  $\mu$ , se numește *coeficient de frecare de alunecare*.

El este o mărime adimensională care depinde de natura și de starea suprafețelor aflate în contact, așa cum se ilustrează în Tabelul 5.1.

**Tabelul 5.1.** Valorile coeficientului de frecare de alunecare

material	coeficient de frecare			
	frecare statică		frecare de alunecare	
	uscată	umedă	uscată	umedă
Oțel dur pe oțel dur	0,78	0,23 (b) 0,11 (d)	0,42	0,081 (c) 0,084 (d)
Oțel dur pe grafit	0,21	0,09 (a)	-	-
Oțel dur pe babbitt	0,42	0,17 (b) 0,09 (d)	0,35	0,14 (b) 0,065 (c) 0,07 (d)
Cupru pe oțel netratat	0,53	-	0,36	-
Aluminiu pe aluminiu	2,05	-	1,4	-
Fontă pe fontă	1,10	-	0,15	0,07 (d)
Oțel netratat pe fontă	-	0,183 (c)	0,23	0,133 (e)
Lemn pe lemn (paralel cu fibra)	0,62	-	0,48	0,164 (g) 0,067 (h)
Fontă pe lemn	-	-	0,49	0,075 (f)

(a) acid oleic; (b) ulei mineral ușor; (c) untdelemn;  
(d) valvolină; (e) ulei mineral mediu; (f) ulei de măsline;  
(g) săpun uscat; (h) unsoare.

**Observația 5.3:**

În conformitate cu prima lege formulată de Coulomb, forța de frecare de alunecare este diferită în cele două cazuri prezentate în Figura 5.6, fiind mai mare în cazul corpurilor suprapuse.

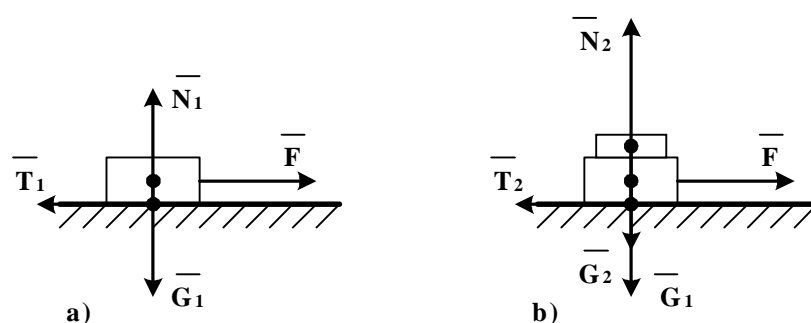


Fig. 5.6.

2. Forța de frecare de alunecare depinde de natura și starea suprafețelor în contact.

3. Forța de frecare de alunecare nu depinde de viteza relativă de deplasare a celor două corpuri în contact și nici de mărimea suprafeței de contact.

**Observația 5.4:**

În conformitate cu a treia lege formulată de Coulomb, forța de frecare de alunecare este aceeași, indiferent de modul în care este așezat un corp material pe o suprafață aspră (pe suprafața de dimensiune mai mare sau pe cea mai mică) așa cum se ilustrează în Figura 5.7.

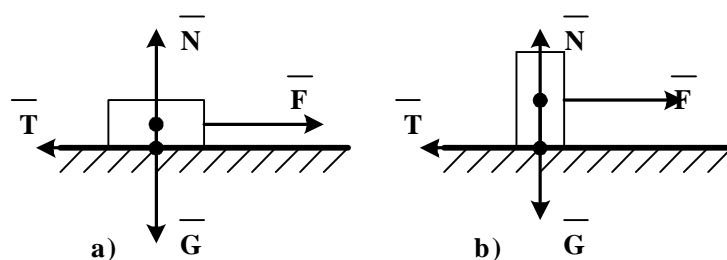


Fig. 5.7.

Ceea ce diferă de la un mod de așezare la altul, este presiunea specifică, adică raportul dintre greutatea corpului material și aria suprafeței de așezare.

Analizând relațiile (5.15) și (5.16) la egalitate, deci pentru cazul în care se realizează unghiul maxim de înclinare,  $\alpha$ , se obține

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{T}{N} = \mu \quad (5.17)$$

ceea ce exprimă faptul că unghiul maxim de înclinare al reacțiunii  $\bar{R}'$  față de normala la suprafața de așezare în punctul de contact, este acel unghi a cărui tangentă este egală cu coeficientul de frecare și se numește *unghi de frecare*.

Situația pentru care forța de frecare atinge valoarea sa maximă și care corespunde unghiului de frecare  $\alpha$ , se numește *echilibru la limita de alunecare*, în timp ce pentru o mărime a forței de frecare determinată de valori ale unghiului de înclinare al reacțiunii  $\bar{R}'$  cuprinse în intervalul  $(0, \alpha)$ , se vorbește despre *echilibru sub limita de alunecare*.

Cercetările ulterioare, care au dezvoltat experimentele lui Coulomb, au arătat că legile frecării stabilite de acesta sunt aproximative și nu sunt verificate de practică în anumite situații, el explicând apariția forței de frecare de alunecare prin existența la suprafața corpurilor în contact a unor asperități care se întrepătrund și care sunt deteriorate de acțiunea forței de frecare, atunci când unul din corpuri se pune în mișcare.

Astfel:

a) coeficientul de frecare de alunecare scade cu creșterea vitezei de deplasare;

b) variația forței de frecare de alunecare nu mai este liniară în raport cu reacțiunea normală  $\bar{N}$  pentru valori mari ale acesteia din urmă (s-a dovedit experimental că, la asemenea valori, coeficientul de frecare nu mai este constant, ci variază lent cu creșterea reacțiunii normale  $\bar{N}$ );

c) mărimea forței de frecare de alunecare crește dacă scade rugozitatea suprafețelor aflate în contact, deoarece cresc forțele de coeziune intermoleculară (influența forțelor de



coeziune intermoleculară se manifestă dacă distanța dintre suprafețele de contact este sub  $10^{-6}$  mm);

d) mărimea forței de frecare de alunecare scade dacă între suprafețele aflate în contact se introduce lubrifiant.

O scurtă analiză a valorilor coeficienților de frecare prezentate în Tabelul 5.1. ilustrează toate aceste observații impuse de practica exploatarea corpurilor materiale aflate în contact și în mișcare relativă unele în raport cu altele.

#### 5.2.3.2. Punct material rezemat pe o suprafață aspră

În Figura 5.3 s-a considerat un punct material, M, rezemat pe suprafața [S], și acționat de forțe a căror rezultantă este  $\bar{R}$ . Ca urmare a existenței legăturii care obligă punctul material să rămână pe suprafața [S] considerată aspră, fixă și nedeformabilă, a fost introdusă – în baza axiomei legăturilor – reacțiunea  $\bar{R}'$ , egală în modul și opusă ca sens rezultantei  $\bar{R}$ .

Rezultanta  $\bar{R}$  se descompune în componenta normală  $\bar{R}_N$  dirijată după direcția normalei, n, la suprafața [S] în punctul M, și în componenta tangențială  $\bar{R}_T$  dirijată după dreapta  $\Delta$  care rezultă din intersecția planului [P], tangent la suprafața [S] în punctul M, cu planul determinat de normala n și rezultanta  $\bar{R}$ .

În mod corespunzător, reacțiunea  $\bar{R}'$  se descompune, după aceleași direcții, în reacțiunea normală  $\bar{N}$  și, respectiv, în forța de frecare  $\bar{T}$ .

Având în vedere că punctul material M rămâne pe suprafața [S], se poate spune că acțiunea rezultantei normale  $\bar{R}_N$ , care tinde să îndepărteze punctul material de pe suprafața [S], este anulată de reacțiunea normală  $\bar{N}$ , deci cele două forțe sunt egale în modul și de sensuri opuse. Pe de altă parte, suprafața [S] fiind considerată aspră, cu frecare, reacțiunea tangențială  $\bar{T}$ , își manifestă acțiunea și deci, punctul material M

este supus atât acțiunii rezultantei tangențiale  $\bar{R}_T$  cât și acțiunii forței de frecare  $\bar{T}$ . Pentru asigurarea echilibrului punctului material pe suprafața considerată, trebuie îndeplinită condiția  $\bar{R}_T + \bar{T} = 0$ .

În cazul punctului material rezemat cu frecare pe o suprafață [S] condiția de echilibru dată de relația (5.3) se scrie

$$\bar{R} + \bar{N} + \bar{T} = 0 \quad (5.18)$$

care este echivalentă cu sistemul de trei ecuații scalare

$$\begin{aligned} R_x + N_x + T_x &= 0; \\ R_y + N_y + T_y &= 0; \\ R_z + N_z + T_z &= 0 \end{aligned} \quad (5.19)$$

În cazul suprafețelor aspre, trebuie să se țină seama de restricția  $T \leq \mu N$  impusă de prima dintre legile formulate de Coulomb.

Analizând Figura 5.8, se poate interpreta aspectul geometric al frecării de alunecare a unui punct material pe o suprafață aspră.

Pentru ca punctul material să se găsească în echilibru pe suprafața aspră considerată, este necesar și suficient ca unghiul de înclinare al reacțiunii  $\bar{R}'$  față de normala la suprafața de așezare în punctul de contact,  $\gamma$ , să fie mai mic sau cel mult egal cu unghiul de frecare,  $\alpha$

$$\gamma \leq \alpha \quad (5.20)$$

Semnul „mai mic” corespunde echilibrului punctului material sub limita de alunecare, iar semnul „egal” corespunde echilibrului punctului material la limita de alunecare.

Se poate conchide că, un punct material se află în echilibru pe o suprafață aspră, dacă și numai dacă reacțiunea  $\bar{R}'$

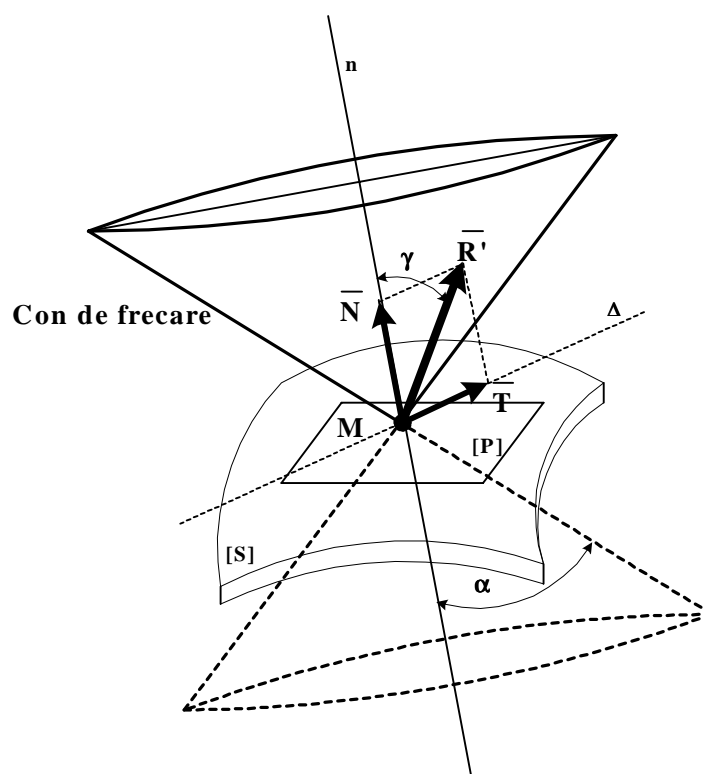


Fig. 5.8.

are dreapta suport conținută în interiorul unui con având vârful în punctul material, axa identică cu direcția normalei la suprafață în punctul material considerat și valoarea unghiului la vârf egală cu dublul valorii unghiului de frecare. Acest con, poartă numele de *con de frecare*.

**Observația 5.5:**

În cazul rezemării punctului material pe o suprafață aspră, [S], acesta are multiple posibilități de deplasare în planul [P] tangent la suprafața considerată. Acest fapt face ca forța de frecare  $\bar{T}$  să introducă, în general, două necunoscute în problemele de echilibru (mărimea și direcția sa în planul tangent). Tot ca necunoscute apar cei doi parametri care dau

poziția punctului material pe suprafață și mărimea reacțiunii normale,  $\bar{N}$ . Având în vedere ecuațiile de echilibru, la care se atașează condiția ca punctul material să nu părăsească legătura și relația suplimentară introdusă de prima lege formulată de Coulomb, se poate spune că *problemele de echilibru ale punctului material pe o suprafață aspră sunt, în general, nedeterminate, fiind posibilă o dublă înfinitate de soluții*. Pentru ridicarea acestei nedeterminări, în problemele practice se impun rezultantei  $\bar{R}$  a forțelor date care acționează asupra punctului material, condiții suplimentare și se studiază echilibrul punctului material la limită ( $T = \mu N$ ). Din soluția astfel găsită, se deduc apoi, soluțiile corespunzătoare echilibrului sub limita de alunecare ( $T < \mu N$ ).

### 5.2.3.3. Punct material rezemat pe o curbă aspră

În Figura 5.4. s-a considerat un punct material, M, rezemat pe curba [C], și acționat de forțe date, a căror rezultantă este  $\bar{R}$ . Ca urmare a existenței legăturii care obligă punctul material să rămână pe curba [C] considerată aspră, fixă și nedeformabilă, a fost introdusă – în baza axiomei legăturilor - reacțiunea  $\bar{R}'$ , egală în modul și opusă ca sens rezultantei  $\bar{R}$ .

Rezultanta  $\bar{R}$  se descompune în componenta normală  $\bar{R}_N$  dirijată după direcția normalei, n, care rezultă din intersecția planului [P], normal la curba [C] în punctul M cu planul determinat de tangenta în M la curbă și rezultanta  $\bar{R}$  și în componenta tangențială  $\bar{R}_T$  dirijată după dreapta  $\Delta$  tangentă la curbă în punctul M.

În mod corespunzător, reacțiunea  $\bar{R}'$  se descompune, după aceleași direcții, în reacțiunea normală  $\bar{N}$  și, respectiv, în forța de frecare  $\bar{T}$ .

Având în vedere că punctul material M rămâne pe curba [C], se poate spune că acțiunea rezultantei normale  $\bar{R}_N$ , care

tinde să îndepărteze punctul material de pe curbă, este anulată de reacțiunea normală  $\bar{N}$ , deci cele două forțe sunt egale în modul și de sensuri opuse. Pe de altă parte, curba [C] fiind considerată aspră, cu frecare, reacțiunea tangențială  $\bar{T}$ , își manifestă acțiunea și deci, punctul material M este supus atât acțiunii rezultantei tangențiale  $\bar{R}_T$  cât și acțiunii forței de frecare,  $\bar{T}$ .

Pentru asigurarea echilibrului punctului material pe curba considerată, trebuie îndeplinită condiția  $\bar{R}_T + \bar{T} = 0$ .

În cazul punctului material rezemat cu frecare pe o curbă [C], condiția de echilibru dată de relația (5.3) se scrie

$$\bar{R} + \bar{N} + \bar{T} = 0 \quad (5.21)$$

care este echivalentă cu trei ecuații scalare

$$\begin{aligned} R_x + N_x + T_x &= 0; \\ R_y + N_y + T_y &= 0; \\ R_z + N_z + T_z &= 0 \end{aligned} \quad (5.22)$$

În cazul curbilor aspre, trebuie să se țină seama de restricția  $T \leq \mu N$  impusă de prima dintre legile formulate de Coulomb.

Analizând Figura 5.9, se poate interpreta aspectul geometric al frecării de alunecare a unui punct material pe o curbă aspră.

Pentru ca punctul material să se găsească în echilibru pe curba aspră considerată, este necesar și suficient ca unghiul de înclinare al reacțiunii  $\bar{R}'$  față de tangenta la curbă în punctul de contact,  $\gamma$ , să fie mai mare sau cel puțin egal cu  $\pi/2 - \alpha$ ,  $\alpha$  reprezentând valoarea unghiului de frecare

$$\gamma \geq \pi/2 - \alpha \quad (5.23)$$

Semnul „mai mare” corespunde echilibrului punctului material sub limita de alunecare, iar semnul „egal” corespunde

echilibrului punctului material la limita de alunecare.

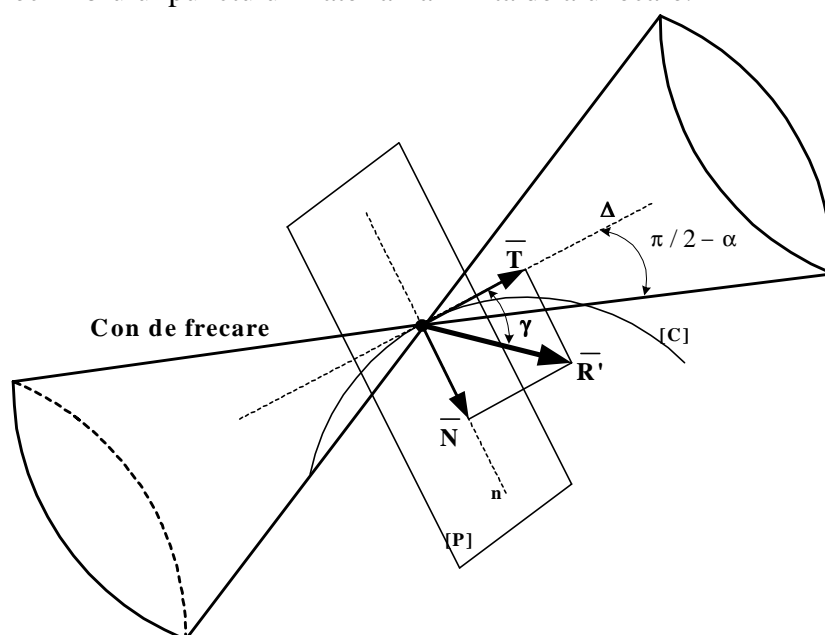


Fig. 5.9.

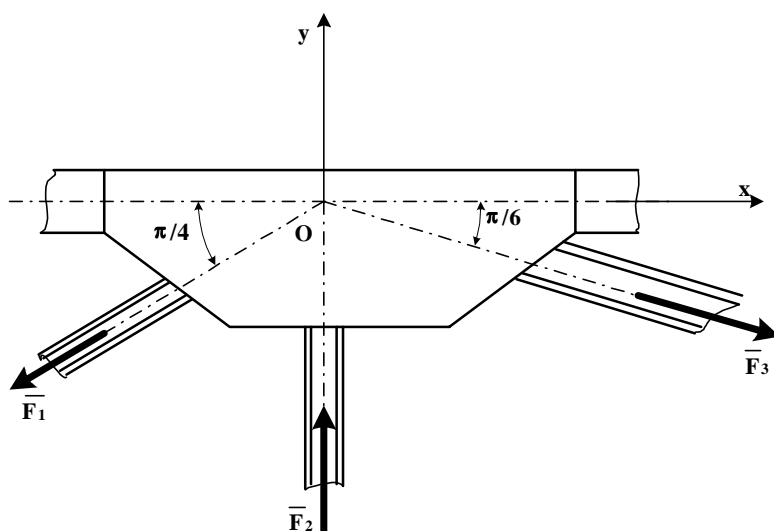
Se poate conchide că, un punct material se află în echilibru pe o curbă aspră, dacă și numai dacă reacțiunea  $\bar{R}'$  are dreapta suport situată în afara unui con având vârful în punctul material, axa identică cu direcția tangentei la curbă în punctul material considerat și valoarea unghiului la vârf egală cu dublul valorii  $\pi/2 - \alpha$ . Acest con, poartă numele de *con de frecare*.

## APLICAȚII

### 1. Enunț

În figură, este reprezentată asamblarea unui guseu cu trei profile laminate care sunt solicate de către forțele axiale  $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3$  concurente în punctul O.

Cunoscând  $F_1 = 2000 \text{ daN}$ ,  $F_2 = 3000 \text{ daN}$ ,  $F_3 = 2500 \text{ daN}$ , se cere să se determine mărimea și orientarea rezultantei forțelor.



### Rezolvare

Se determină proiecțiile rezultantei  $\bar{R}$  pe axele sistemului cartezian de coordonate, utilizând relațiile

$$R_x = \sum_{i=1}^3 F_{ix} = -F_1 \cos \frac{\pi}{4} + F_3 \cos \frac{\pi}{6}$$

$$R_y = \sum_{i=1}^3 F_{iy} = -F_1 \sin \frac{\pi}{4} + F_2 - F_3 \sin \frac{\pi}{6}$$

Înlocuind valorile numerice și efectuând calculele, se obține

$$R_x = -2000 \cos \frac{\pi}{4} + 2500 \cos \frac{\pi}{6} = 751 \text{ daN}$$

$$R_y = -2000 \sin \frac{\pi}{4} + 3000 - 2500 \sin \frac{\pi}{6} = 336 \text{ daN}$$

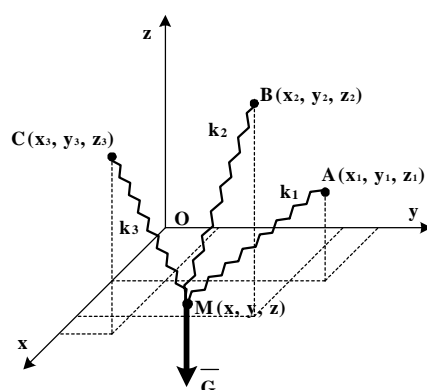
Mărimea rezultantei  $\bar{R}$  este dată de relația  $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$  și are valoarea  $R = 822 \text{ daN}$ .

Orientarea rezultantei  $\bar{R}$  este dată de relația  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{R_y}{R_x}$  iar

valoarea unghiului este de aproximativ  $\alpha \cong 24^\circ$ .

## 2. Enunț

Un punct material având greutatea  $G$  este legat cu ajutorul a trei arcuri cu constantele elastice  $k_1$ ,  $k_2$  respectiv  $k_3$ , de trei puncte  $A(x_1, y_1, z_1)$ ,  $B(x_2, y_2, z_2)$  respectiv  $C(x_3, y_3, z_3)$ . Se cere să se determine coordonatele  $x$ ,  $y$ ,  $z$  ale punctului material  $M$  pentru poziția sa de echilibru.



## Rezolvare

Asupra punctului material acționează forța de greutate având mărimea  $G$  și forțele elastice având mărimile  $F_1 = k_1 \overline{MA}$ ,  $F_2 = k_2 \overline{MB}$ ,  $F_3 = k_3 \overline{MC}$ .

Condiția de echilibru a punctului material considerat se scrie,

$$\bar{G} + \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 = 0$$

sau, proiectată pe axele sistemului cartezian de coordonate,

$$\begin{cases} k_1(x_1 - x) + k_2(x_2 - x) + k_3(x_3 - x) = 0 \\ k_1(y_1 - y) + k_2(y_2 - y) + k_3(y_3 - y) = 0 \\ -G + k_1(z_1 - z) + k_2(z_2 - z) + k_3(z_3 - z) = 0 \end{cases}$$

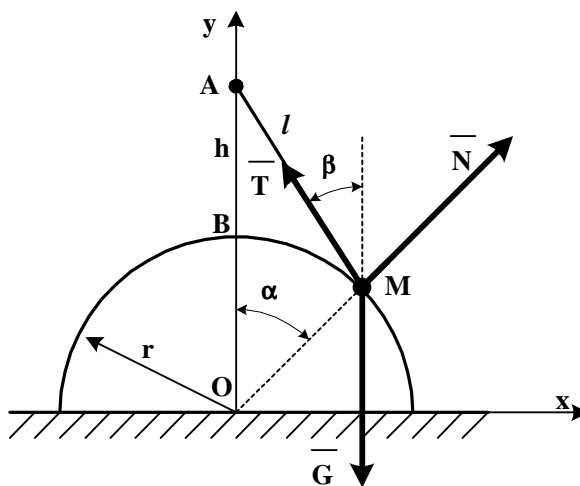


Prin rezolvarea sistemului de ecuații se obțin soluțiile

$$\begin{aligned}x &= \frac{k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3}{k_1 + k_2 + k_3} \\y &= \frac{k_1 y_1 + k_2 y_2 + k_3 y_3}{k_1 + k_2 + k_3} \\z &= \frac{k_1 z_1 + k_2 z_2 + k_3 z_3 - G}{k_1 + k_2 + k_3}\end{aligned}$$

### 3. Enunț

Un punct material de masă  $m$ , situat într-un plan vertical, este fixat în  $A$ , ca în figura de mai jos, fiind prins de un fir de lungime  $l$ . Punctul material considerat se sprijină fără frecare pe un semicerc fix de rază  $r$ . Știind că punctul material este în echilibru și că  $\overline{AB} = h$  să se determine tensiunea din fir și reacțiunea semicercului.



### Rezolvare

Asupra punctului material considerat acționează greutatea  $\overline{G}$ , tensiunea din fir,  $\overline{T}$  și reacțiunea  $\overline{N}$ , din partea semicercului.

Condiția de echilibru se scrie

$$\overline{G} + \overline{T} + \overline{N} = 0$$

sau, proiectată pe axele sistemului cartezian de coordonate,

$$\begin{cases} N \sin \beta - T \sin \alpha = 0 \\ N \cos \beta + T \cos \alpha - mg = 0 \end{cases}$$

Pentru rezolvarea acestui sistem de ecuații este necesar să se observe că, în triunghiul OAM, aplicând teorema sinusurilor, rezultă relația

$$\frac{r}{\sin \alpha} = \frac{l}{\sin \beta} = \frac{r+h}{\sin(\alpha+\beta)}, \text{ de unde,}$$

$$\frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{r}{r+h}, \quad \frac{\sin \beta}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{l}{r+h}$$

Rezolvând, se obțin soluțiile

$$T = mg \frac{\sin \beta}{\sin(\alpha+\beta)} = mg \frac{l}{r+h}$$

$$N = mg \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha+\beta)} = mg \frac{r}{r+h}$$

#### 4. Enunț

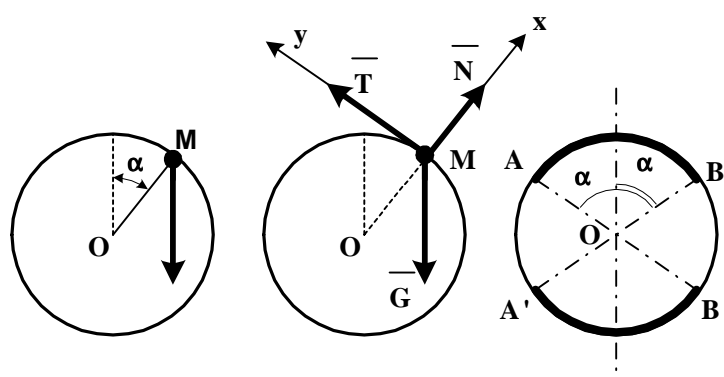
Se cere să se determine pozițiile de echilibru limită ale unui punct material având greutatea  $G$ , rezemat pe un cerc aspru situat într-un plan vertical, cunoscând coeficientul de frecare,  $\mu$ , dintre punctul material considerat și cerc.

#### Rezolvare

Asupra punctului material considerat acționează greutatea  $\overline{G}$ , reacțiunea  $\overline{N}$ , dirijată după direcția razei, din partea cercului și forța de frecare,  $\overline{T}$ , tangentă la cerc.

Condiția de echilibru se scrie

$$\overline{G} + \overline{N} + \overline{T} = 0$$



sau, proiectată pe axele sistemului cartezian de coordonate,

$$\begin{cases} N - G \cos \alpha = 0 \\ T - G \sin \alpha = 0 \end{cases}$$

Se obțin expresiile  $N = G \cos \alpha$ ,  $T = G \sin \alpha$  de care se ține seama în relația care exprimă condiția frecării la limită,  $T = \mu N$ .

Rezultă,  $G \sin \alpha = \mu G \cos \alpha$  respectiv  $\operatorname{tg} \alpha = \mu$  sau  $\alpha = \operatorname{arctg} \mu$ .

Deoarece

$$\sin \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{\mu}{\sqrt{1 + \mu^2}}$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \mu^2}}$$

se obțin expresiile necunoscutelor

$$N = \frac{G}{\sqrt{1 + \mu^2}}, \quad T = \frac{G\mu}{\sqrt{1 + \mu^2}}.$$

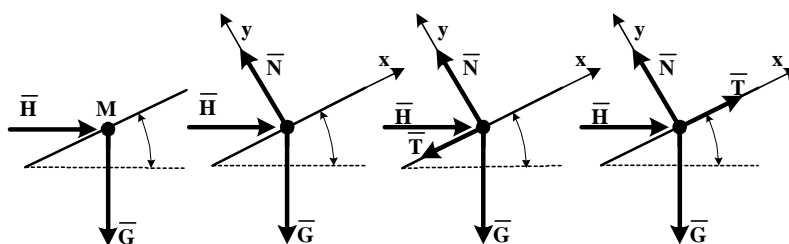
Pozițiile limită de echilibru sunt în număr de patru: A, B, A', B'. Punctul material considerat se găsește deci, în echilibru,

pe arcele de cerc limitate de aceste perechi de puncte, așa cum rezultă și din figură.

### 5. Enunț

Un punct material de greutate  $\overline{G}$  se găsește în echilibru pe un plan înclinat cu un unghi  $\alpha$  față de orizontală, fiind acționat și de forța orizontală  $\overline{H}$  așa cum se vede și în figură. Se cere să se determine mărimile forței orizontale  $\overline{H}$  pentru care este posibil echilibrul punctului material considerat, în două ipostaze:

- mișcarea are loc pe un plan înclinat luciu;
- mișcarea are loc pe un plan înclinat aspru, având coeficientul de frecare  $\mu$ .



### Rezolvare

a) în ipoteza planului înclinat luciu, punctul material este acționat de forța de greutate  $\overline{G}$ , de forța orizontală  $\overline{H}$  și de reacțiunea normală a planului înclinat  $\overline{N}$ .

Condiția de echilibru se scrie

$$\overline{G} + \overline{N} + \overline{H} = 0$$

sau, proiectată pe axele sistemului cartezian de coordonate,

$$\begin{cases} H \cos \alpha - G \sin \alpha = 0 \\ N - G \cos \alpha - H \sin \alpha = 0 \end{cases}$$

Se obțin soluțiile

$$H = G \tan \alpha, \quad N = \frac{G}{\cos \alpha}$$

b) în ipoteza planului înclinat aspru, condiția de echilibru se scrie:

$$\overline{G} + \overline{N} + \overline{H} + \overline{T} = 0$$

Este necesar să se țină seama de cele două tipuri de mișcări:

1. urcare pe planul înclinat, pentru care este valabilă relația  $G \sin \alpha < H h \cos \alpha$ . Condiția de echilibru proiectată pe axele sistemului de coordonate, se scrie:

$$\begin{cases} H \cos \alpha - G \sin \alpha - T = 0 \\ N - G \cos \alpha - H \sin \alpha = 0 \\ T \leq \mu N \end{cases}$$

2. coborâre pe planul înclinat, pentru care este valabilă relația  $G \sin \alpha > H h \cos \alpha$ . Condiția de echilibru proiectată pe axele sistemului de coordonate, se scrie:

$$\begin{cases} H \cos \alpha - G \sin \alpha + T = 0 \\ N - G \cos \alpha - H \sin \alpha = 0 \\ T \leq \mu N \end{cases}$$

Din rezolvarea celor două sisteme de ecuații rezultă

$$G \frac{\sin \alpha - \mu \cos \alpha}{\cos \alpha - \mu \sin \alpha} \leq H \leq G \frac{\sin \alpha + \mu \cos \alpha}{\cos \alpha - \mu \sin \alpha}$$

Se poate conchide că soluția nu este unică, valoarea necunoscutei înscriindu-se într-un domeniu pentru care este posibil echilibrul punctului material considerat.

## CAPITOLUL 6

### STATICA SOLIDULUI RIGID

În studiul echilibrului domeniilor materiale utilizate în tehnică, conceptul de punct material este insuficient, fiind necesară introducerea unui concept nou care să permită o modelare mai pertinentă, subliniindu-se simplificările necesare și admisibile care fac posibilă rezolvarea problemelor practice cu mijloace teoretice specifice mecanicii.

Un alt model teoretic, frecvent utilizat, este cel al *corpului material*, model care se aplică domeniilor materiale la care cele trei dimensiuni, lungimea, lățimea și grosimea, au ordine de mărime comparabile. Acest model are ca elemente caracteristice volumul geometric și o masă distribuită pe unitatea de volum ca o caracteristică a inerției domeniului material considerat.

#### **Definiția 6.1:**

Corpurile materiale se numesc *solide rigide* dacă rămân nedeformate la acțiunile mecanice care tind să le schimbe forma.

Ca și în cazul punctului material, în studiul echilibrului solidului rigid este necesară cunoașterea gradelor de libertate.

Din punctul de vedere al poziției pe care o poate avea în spațiu, solidul rigid este:

- liber (când poate ocupa orice poziție în spațiu);
- supus la legături (când este obligat să respecte anumite restricții geometrice).

#### **Observația 6.1:**

Problemele privind statica solidului rigid rămân aceleași ca și în cazul echilibrului punctului material.

În majoritatea situațiilor tehnice reale, solidul rigid se află în interacțiune mecanică cu corpurile materiale din mediul înconjurător. Măsura interacțiunii dintre solidul rigid considerat și mediul material exterior este *forța*, interacțiunea mecanică putându-se realiza la distanță (conform legii atracției universale)

sau putând fi interacțiuni de contact. Se pot distinge două tipuri mari de forțe:

➤ *forțe exterioare active*, care nu depind de starea de mișcare a solidului rigid asupra căruia acționează și care pot să accelereze sau să încetinească mișcarea acestuia;

➤ *forțe exterioare pasive*, care depind de existența unor forțe exterioare active sau sunt condiționate de starea de mișcare a rigidului.

**Definiția 6.2:**

Un solid rigid care are o interacțiune mecanică cu un corp material, fie prin contact direct, fie prin intermediul unor elemente speciale de legătură, care impun anumite restricții geometrice în deplasarea unor puncte ale sale, se numește *solid rigid supus la legături*, iar interacțiunea se numește *forță de legătură* sau *reacțiune*.

**Definiția 6.3:**

Un solid rigid căruia nu i se impun nici un fel de restricții geometrice în mișcarea lui se numește *solid rigid liber*.

**6.1. STATICA SOLIDULUI RIGID LIBER**

Un solid rigid liber în spațiu are șase grade de libertate, poziția sa în raport cu un sistem de referință presupus fix sau inertial, fiind complet definită cu ajutorul a șase parametri scalari independenți.

Există mai multe posibilități de alegere a acestor parametri, după cum urmează:

➤ coordonatele a trei puncte necoliniare aparținând solidului rigid

În Figura 6.1 s-au considerat punctele  $A_1(x_1, y_1, z_1)$ ,  $A_2(x_2, y_2, z_2)$ ,  $A_3(x_3, y_3, z_3)$ . Dacă se ține cont de condiția de rigiditate a solidului, atunci distanțele  $\overline{A_i A_j}$ ,  $i, j=1, 2, 3$   $i \neq j$ , sunt fixe și cele nouă coordonate ale punctelor materiale alese, satisfac relația  $\overline{A_i A_j}^2 = (\bar{r}_j - \bar{r}_i)^2 = (x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2 = \text{const.}$

pentru  $i, j=1, 2, 3$   $i \neq j$ . Datorită celor trei relații de dependență care se pot scrie între cele nouă coordonate, se poate spune că poziția solidului rigid este complet definită de șase parametri scalari independenți.

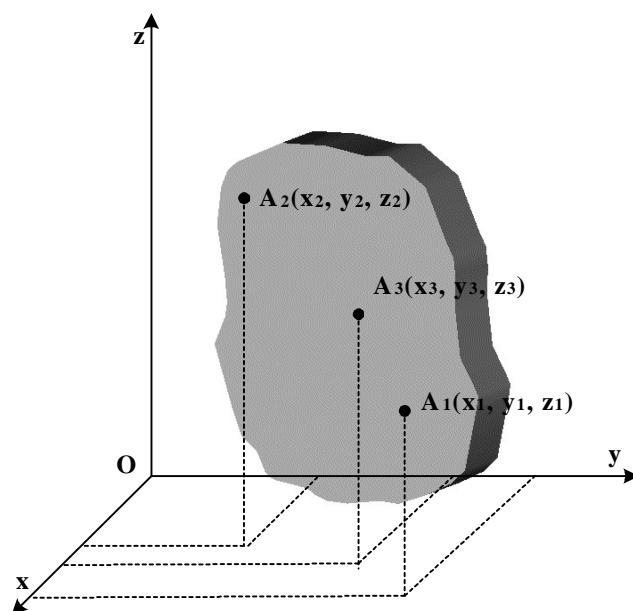


Fig. 6.1.

➤ coordonatele unui punct  $A(x_A, y_A, z_A)$  aparținând solidului rigid și unghiurile Euler ( $\psi, \theta, \varphi$ )

În Figura 6.2 cele trei unghiuri Euler precizează orientarea axelor triedrului mobil  $Axyz$  atașat solidului rigid în punctul  $A$ , față de sistemul de coordonate  $A\xi\eta\zeta$  paralel cu axele unui sistem de referință  $OXYZ$  considerat fix.

Unghiurile Euler, obținute prin trei rotații succesive ale solidului rigid și care vor fi complet definite în studiul cinematicii, sunt:

- unghiul de precesie  $\psi$ , se obține prin rotirea sistemului fix  $A\xi\eta\zeta$  în jurul axei  $A\zeta$ ; ca urmare, axa  $A\xi$  ajunge în poziția  $AN$  numită axa nodurilor, axa  $A\eta$  devenind  $Ay'$ ;



- unghiul de nutație  $\theta$ , se obține prin rotirea sistemului Any' $\zeta$  în jurul axei nodurilor AN; ca urmare, axa Ay' ajunge în poziția Ay'', axa A $\zeta$  devenind Az;

- unghiul de rotație proprie  $\varphi$ , se obține prin rotirea sistemului Any''z în jurul axei Az; ca urmare, axa nodurilor AN ajunge în poziția Ax, axa Ay'' devenind Ay.

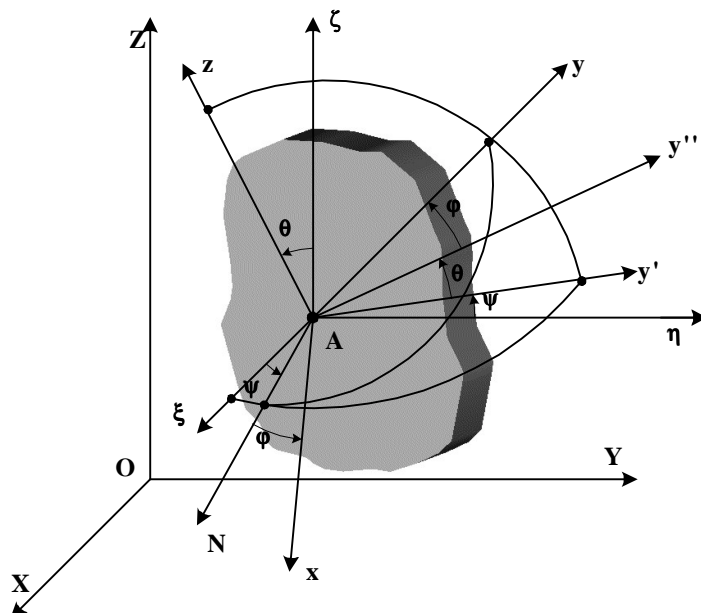


Fig. 6.2.

Se poate spune că poziția solidului rigid este complet definită de cei șase parametri scalari care sunt independenți: coordonatele  $x_A, y_A, z_A$  și unghiurile Euler  $\psi, \theta, \varphi$ .

➤ coordonatele unui punct  $A(x_A, y_A, z_A)$  aparținând solidului rigid și cele trei unghiuri formate de fiecare dintre axele sistemului de coordonate  $Axyz$ , atașat solidului rigid în punctul A, cu axele sistemului de coordonate  $OXYZ$  presupus fix, așa cum se vede în Figura 6.3.

Cei doisprezece parametri astfel aleși, nu sunt independenți, fiind valabile următoarele relații

$$\cos^2 \alpha_{xX} + \cos^2 \beta_{xY} + \cos^2 \gamma_{xZ} = 1$$

$$\cos^2 \alpha_{yX} + \cos^2 \beta_{yY} + \cos^2 \gamma_{yZ} = 1$$

$$\cos^2 \alpha_{zX} + \cos^2 \beta_{zY} + \cos^2 \gamma_{zZ} = 1$$

$$\cos \alpha_{xX} \cos \alpha_{yX} + \cos \beta_{xY} \cos \beta_{yY} + \cos \gamma_{xZ} \cos \gamma_{yZ} = 0$$

$$\cos \alpha_{yX} \cos \alpha_{zX} + \cos \beta_{yY} \cos \beta_{zY} + \cos \gamma_{yZ} \cos \gamma_{zZ} = 0$$

$$\cos \alpha_{zX} \cos \alpha_{xX} + \cos \beta_{zY} \cos \beta_{xY} + \cos \gamma_{zZ} \cos \gamma_{xZ} = 0$$

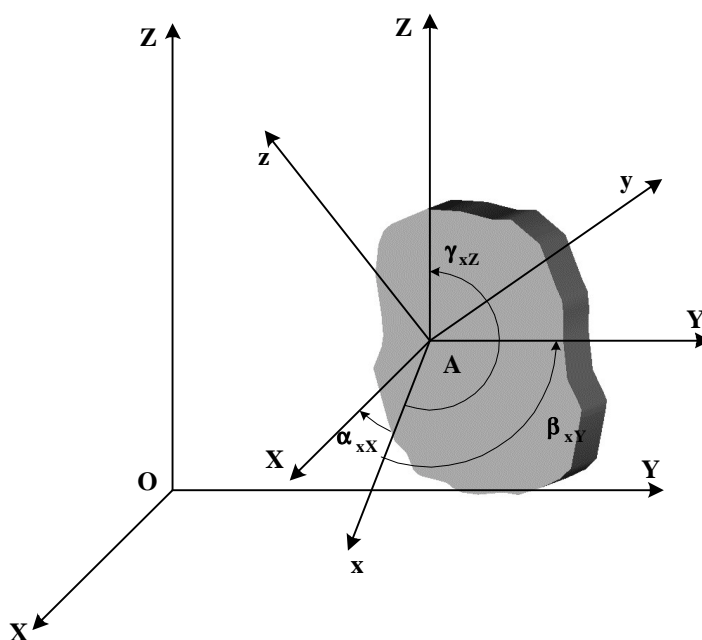


Fig. 6.3.

Datorită celor șase relații de dependență care se pot scrie între cei doisprezece parametri, se poate spune că poziția solidului rigid este complet definită de șase parametri scalari independenți.

*Pentru ca un solid rigid liber, aflat în repaus în raport cu un sistem de referință considerat fix sau inerțial, să rămână în continuare în repaus la aplicarea unui sistem de forțe, este*

*necesar și suficient ca torsorul de reducere al forțelor într-un punct să fie nul, adică*

$$\bar{\mathbf{R}} = 0, \quad \bar{\mathbf{M}}_O = 0 \quad (6.1)$$

sau

$$\sum_{i=1}^n \bar{\mathbf{F}}_i = 0, \quad \sum_{i=1}^n \bar{\mathbf{r}}_i \times \bar{\mathbf{F}}_i = 0 \quad (6.2)$$

În relațiile (6.1) sau (6.2) se precizează faptul că sistemul de forțe care acționează asupra solidului rigid este în echilibru sau că rigidul asupra căruia acționează aceste forțe este în echilibru.

Echilibrul solidului rigid se realizează pentru o anumită configurație a sa în raport cu un reper, adică, pentru poziții bine determinate ale punctelor rigidului în raport cu reperul ales.

Condiția necesară și suficientă pentru realizarea echilibrului solidului rigid liber rezultă și din proiectarea ecuațiilor vectoriale (6.1) sau (6.2) pe axele sistemului de coordonate și anume

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0, \quad \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0, \quad \sum_{i=1}^n F_{iz} = 0 \\ \sum_{i=1}^n (y_i F_{iz} - z_i F_{iy}) = 0, \quad \sum_{i=1}^n (z_i F_{ix} - x_i F_{iz}) = 0, \quad \sum_{i=1}^n (x_i F_{iy} - y_i F_{ix}) = 0 \end{aligned} \quad (6.3)$$

## **6.2. STATICA SOLIDULUI RIGID SUPUS LA LEGĂTURI**

### **6.2.1. Legăturile solidului rigid**

Ținând seama de definiția 6.2, se observă că tot ceea ce limitează deplasările unui solid rigid în spațiu se constituie în *legături*.

Astfel, pentru un corp așezat pe o masă orizontală, masa este o legătură deoarece nu-i permite corpului să se deplaseze vertical în jos.

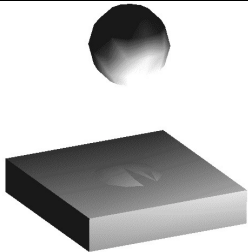

Clasificarea legăturilor solidului rigid se face după mai multe criterii, dintre care, cele mai importante sunt:

- a) forma geometrică a zonei de contact;
- b) numărul gradelor de libertate.

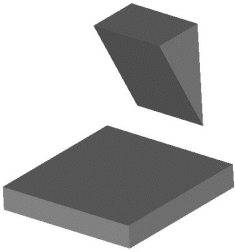
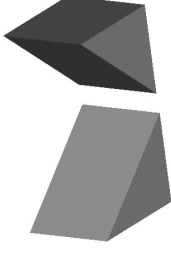
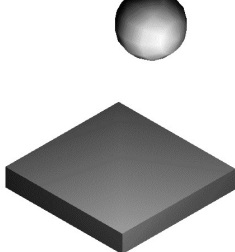
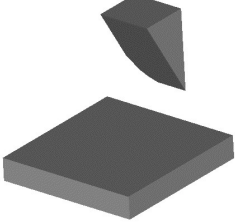
**a) Clasificarea legăturilor solidului rigid după forma geometrică a zonei de contact**

Această clasificare are la bază faptul că cele două corpuri materiale, aflate în interacțiune mecanică, pot participa la contact respectiv cu câte o suprafață, o curbă sau un punct, așa cum rezultă din analiza tabelului 6.1.

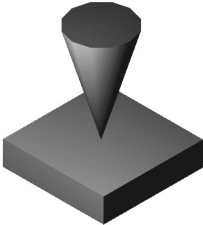

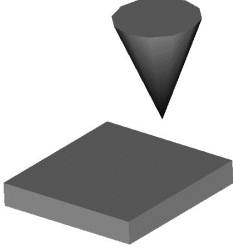

**Tabelul 6.1.** Clasificarea legăturilor solidului rigid după forma geometrică a zonei de contact

Tipul contactului mecanic realizat între corpurile materiale	Forma geometrică a legăturii
legătură pe o suprafață rezultată din contactul suprafață/suprafață	
legătură pe o curbă rezultată din contactul suprafață/suprafață	

**Tabelul 6.1:** continuare

Tipul contactului mecanic realizat între corpurile materiale	Forma geometrică a legăturii
legătură pe o curbă rezultată din contactul suprafață/curbă	
legătură pe o curbă rezultată din contactul curbă/curbă	
legătură într-un punct rezultată din contactul suprafață/suprafață	
legătură într-un punct rezultată din contactul suprafață/curbă	

**Tabelul 6.1:** continuare


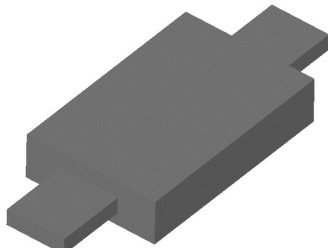
Tipul contactului mecanic realizat între corpurile materiale	Forma geometrică a legăturii
legătură într-un punct rezultată din contactul suprafață/punct	
legătură într-un punct rezultată din contactul curbă/curbă	
legătură într-un punct rezultată din contactul curbă/punct	
legătură într-un punct rezultată din contactul punct/punct	

**b) Clasificarea legăturilor solidului rigid după numărul gradelor de libertate**

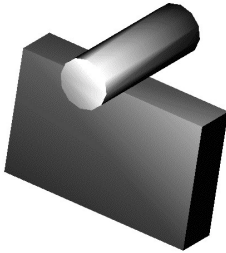
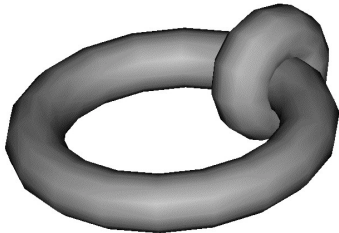
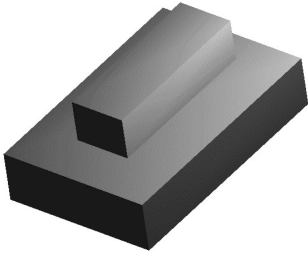
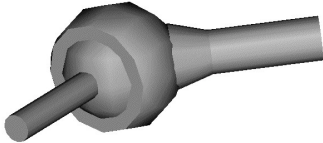
Dacă un solid rigid liber în spațiu are șase grade de libertate, poziția sa în raport cu un sistem de referință presupus fix sau inerțial, fiind complet definită cu ajutorul a șase parametri scalari independenți, solidul rigid supus la legături are un număr mai mic de grade de libertate, ca urmare a restricțiilor impuse de legăturile respective.

Această clasificare ține seama de numărul gradelor de libertate pe care le poate avea un solid rigid supus la legături, așa cum rezultă și din analiza Tabelului 6.2.

**Tabelul 6.2** Clasificarea legăturilor solidului rigid după numărul gradelor de libertate

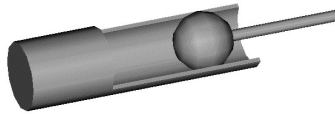
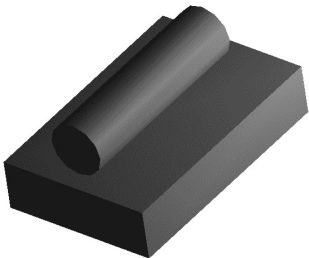
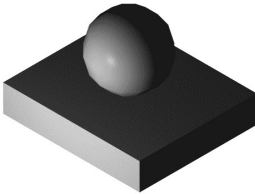
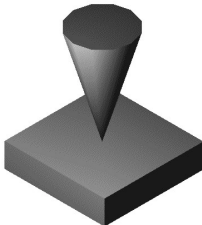
Tipul contactului mecanic realizat între corpurile materiale	Numărul gradelor de libertate
<b>legături cu un grad de libertate</b>	
con-con	
prismă-prismă	

**Tabelul 6.2:** continuare

Tipul contactului mecanic realizat între corpurile materiale	Numărul gradelor de libertate
<b>legături cu două grade de libertate</b>	
prismă-cilindru	
tor-tor	
<b>legături cu trei grade de libertate</b>	
plan-plan	
sferă-sferă	



**Tabelul 6.2:** continuare

Tipul contactului mecanic realizat între corpurile materiale	Numărul gradelor de libertate
<b>legături cu patru grade de libertate</b>	
sferă-cilindru	
cilindru-plan	
<b>legături cu cinci grade de libertate</b>	
sferă-plan	
con-plan	

**Observația 6.2:**

În multe dintre situațiile practice, legătura considerată lasă solidului rigid un număr de mișcări, care nefiind totdeauna independente, nu coincide obligatoriu cu numărul gradelor de libertate. De exemplu, în cazul legăturii șurub-piuliță, deși sunt posibile doar două mișcări (o translație și o rotație), datorită faptului că nu sunt independente, legătura are doar un grad de libertate.

Trebuie observat că, dacă forța rezultantă a unui sistem de forțe aplicate asupra unui solid rigid tinde să-l deplaseze pe o anumită direcție, deplasarea fiind împiedicată de o anumită legătură, atunci, înseamnă că această legătură acționează asupra solidului rigid considerat, cu o forță egală și de sens contrar cu cea dată, în baza principiului acțiunii și reacțiunii.

Forțele și/sau cuplurile cu care una sau mai multe legături acționează asupra unui solid rigid limitând unele din mișcărilor sale (translații sau rotații) se numesc *forțe și/sau cupluri de legătură sau reacțiuni*. Evident, în legături apar și forțe și/sau cupluri de forțe pasive, existența lor depinzând de forțele și/sau cuplurile active. Când deplasarea corpului este împiedicată pe o anumită direcție aceasta este chiar direcția reacțiunii (pot fi restricții de deplasare pe mai multe direcții, deci, pe fiecare direcție apare câte o componentă a reacțiunii). Când este împiedicată rotirea corpului în jurul unei drepte, atunci, apare un cuplu opus tendinței de rotire, al cărui moment are direcția acelei drepte și sensul corespunzător.

Pentru a rezolva problema echilibrului solidului rigid supus la legături, este necesar să se țină seama de **axioma legăturilor**, potrivit căreia orice tip de legătură se poate înlocui cu forțe și/sau cu momente ale unor cupluri, ce au același efect ca și legăturile fizice propriu-zise, astfel încât, solidul rigid poate fi considerat ca fiind liber sub acțiunea forțelor și/sau cuplurilor date și a celor de legătură.

*Condiția necesară și suficientă pentru ca un solid rigid liber, aflat în repaus în raport cu un sistem de referință*

*considerat fix sau inerțial, să rămână în continuare în repaus la aplicarea unui sistem de forțe exterioare, este necesar și suficient ca torsorul de reducere al forțelor exterioare și al forțelor de legătură într-un punct să fie nul, adică*

$$\bar{\mathbf{R}} + \bar{\mathbf{R}}' = 0, \quad \bar{\mathbf{M}}_O + \bar{\mathbf{M}}'_O = 0 \quad (6.4)$$

sau

$$\sum_{i=1}^n \bar{\mathbf{F}}_i + \bar{\mathbf{R}}' = 0, \quad \sum_{i=1}^n \bar{\mathbf{r}}_i \times \bar{\mathbf{F}}_i + \bar{\mathbf{M}}'_O = 0 \quad (6.5)$$

unde s-a notat rezultanta forțelor exterioare,  $\bar{\mathbf{R}} = \sum_{i=1}^n \bar{\mathbf{F}}_i$ ,

momentul resultant al forțelor exterioare,  $\bar{\mathbf{M}}_O = \sum_{i=1}^n \bar{\mathbf{r}}_i \times \bar{\mathbf{F}}_i$ ,

rezultanta forțelor de legătură,  $\bar{\mathbf{R}}'$ , respectiv momentul resultant al forțelor de legătură,  $\bar{\mathbf{M}}'_O$ .

Proiectând relațiile (6.4) sau (6.5) pe axele unui sistem de referință cartezian, se obțin ecuațiile generale de echilibru ale solidului rigid supus la legături, similare ecuațiilor descrise de relația (6.3).

Pentru ca problemele echilibrului solidului rigid supus la legături să fie static determinate, este necesar ca numărul de necunoscute introdus de forțele date și de legătură, împreună cu numărul parametrilor care determină poziția de echilibru a solidului rigid considerat, să fie cel mult egal cu șase în cazul unui sistem spațial de forțe sau cel mult egal cu trei în cazul unui sistem plan de forțe.

Studiul echilibrului solidului rigid supus la legături face parte din categoria problemelor dificile ale mecanicii, fiind necesară cunoașterea tuturor noțiunilor și conceptelor generale ale mecanicii (definite în partea întâi), care permit descrierea teoretică a diferitelor aspecte tehnice practice studiate. Cazurile care vor fi analizate în continuarea acestui capitol sunt doar

câteva exemple, din multitudinea de aspecte pe care le oferă tehnica, pentru echilibrul solidului rigid.

Capitolul continuă cu analiza unor aspecte mai simple, referitoare la statica solidului rigid supus la legături fără frecare, ulterior urmând a se acorda atenție unor probleme legate de statica solidului rigid supus la legături cu frecare.

### 6.2.2. Echilibrul solidului rigid supus la legături fără frecare

#### Definiția 6.4:

Se numește *legătură fără frecare sau ideală*, legătura pentru care, în timpul mișcării relative a suprafețelor în contact, jocurile funcționale sunt nule, nu se înregistrează deformații ale suprafețelor, iar mișcările se desfășoară fără frecare.

Solidul rigid poate avea următoarele tipuri de legături:

- reazemul simplu;
- articulația;
- încastrarea;
- prinderea cu fire.

Studiul legăturilor solidului rigid urmărește două aspecte și anume:

- aspectul geometric, care precizează numărul gradelor de libertate;
- aspectul mecanic, care analizează elementele mecanice (forțe și momente) cu care se înlocuiește legătura.

#### 6.2.2.1. Reazemul simplu

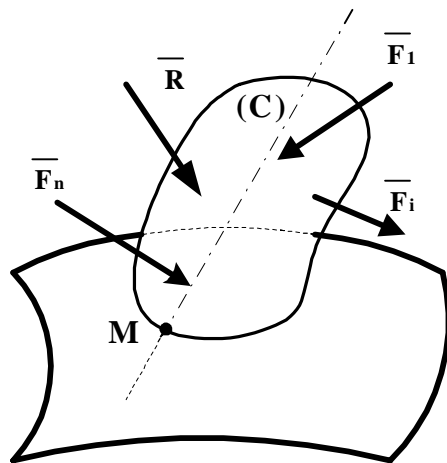
#### Definiția 6.5:

Se numește *reazem simplu*, legătura unui solid rigid cu un corp material din mediul înconjurător, atunci când suprafețele lor în contact au în permanență un punct comun (numit punct teoretic de rezemare).

*Rezemarea* este, deci, legătura prin care un punct al unui solid rigid este obligat să rămână permanent pe o suprafață sau pe o curbă dată.

*Aspectul geometric.* Corespunzător definiției, un solid rigid este simplu rezemat pe o suprafață având ecuația  $f(x, y, z) = 0$ , dacă un punct al său,  $A(x_A, y_A, z_A)$  se găsește pe această suprafață, deci dacă satisface ecuația suprafeței de sprijin  $f(x_A, y_A, z_A) = 0$ . Prin urmare, condițiilor de rigiditate ale solidului considerat, li se mai adaugă această nouă condiție, și se poate concluziona că *un reazem simplu suprimă un grad de libertate*.

*Aspectul mecanic.* În Figura 6.4, solidul rigid (C), asupra căruia acționează un sistem de forțe exterioare  $\vec{F}_i, i = 1 \dots n$  având rezultanta  $\vec{R}$ , se sprijină pe o suprafață, în punctul M.



Rigidul considerat nu se poate mișca înspre suprafața de sprijin, presupusă fixă și nedeformabilă, pe direcția normalei (în planul tangent la suprafață mișcarea este liberă). Aceasta este echivalent cu a spune că suprafața de sprijin reacționează asupra

**Fig. 6.4.** rigidului (C) cu forța  $\vec{N}$ , egală în modul și de sens opus forței cu care solidul rigid acționează asupra suprafeței de sprijin în punctul M și a cărei mărime este determinată în funcție de rezultanta  $\vec{R}$  a sistemului de forțe date.

În concluzie, pentru studiul echilibrului solidului rigid, *reazemul simplu se înlocuiește cu o forță de legătură numită*

reacțiune,  $\bar{N}$ , normală la suprafața de sprijin în punctul  $M$ , având sensul determinat la legătura unilaterală (v. definiția 4.4) și sensul nedeterminat la legătura bilaterală (v. definiția 4.5) așa cum se arată în Figura 6.5.

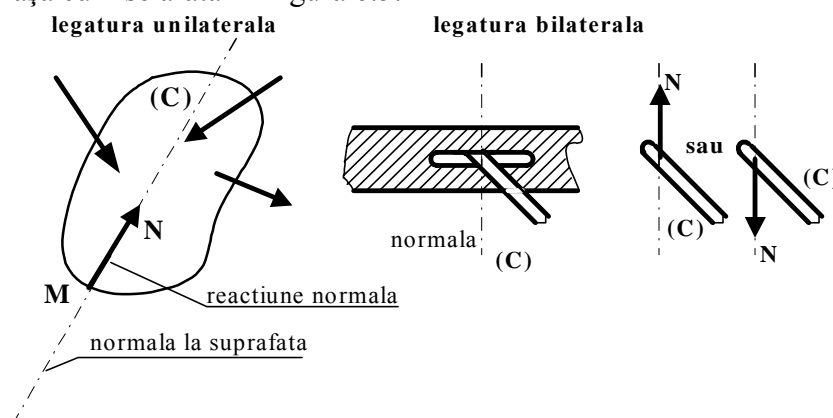


Fig. 6.5

În ecuațiile de echilibru, reazemul simplu introduce o singură necunoscută, reprezentată de modulul reacțiunii normale la suprafața de sprijin. Astfel, rigidul este considerat liber sub acțiunea forțelor exterioare (date) și a forței de legătură reprezentată de reacțiunea normală, notată de obicei cu  $N$ , iar cele șase ecuații de echilibru care se pot scrie în cazul cel mai general, când forțele sunt în spațiu, sunt suficiente pentru determinarea celor cinci parametri de echilibru (corespunzători celor cinci grade de libertate rămase) și a mărimei reacțiunii normale.

Ecuațiile vectoriale de echilibru static pentru un solid rigid simplu rezemat într-un punct pe o suprafață de sprijin și acționat de un sistem de forțe exterioare  $\bar{F}_i, i = 1 \dots n$ , se scriu

$$\bar{R} + \bar{N} = 0; \quad \bar{M}_O + \bar{M}'_O = 0 \quad (6.6)$$

care se pot proiecta pe axele sistemului cartezian de coordonate

$$\sum_{i=1}^n (F_{xi} + N_x) = 0; \quad \sum_{i=1}^n (F_{yi} + N_y) = 0; \quad \sum_{i=1}^n (F_{zi} + N_z) = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n M_O(F_{xi}, N_x) = 0; \quad \sum_{i=1}^n M_O(F_{yi}, N_y) = 0; \quad \sum_{i=1}^n M_O(F_{zi}, N_z) = 0;$$

(6.7)

Exemple de reazeme simple sunt prezentate în Figura 6.6.

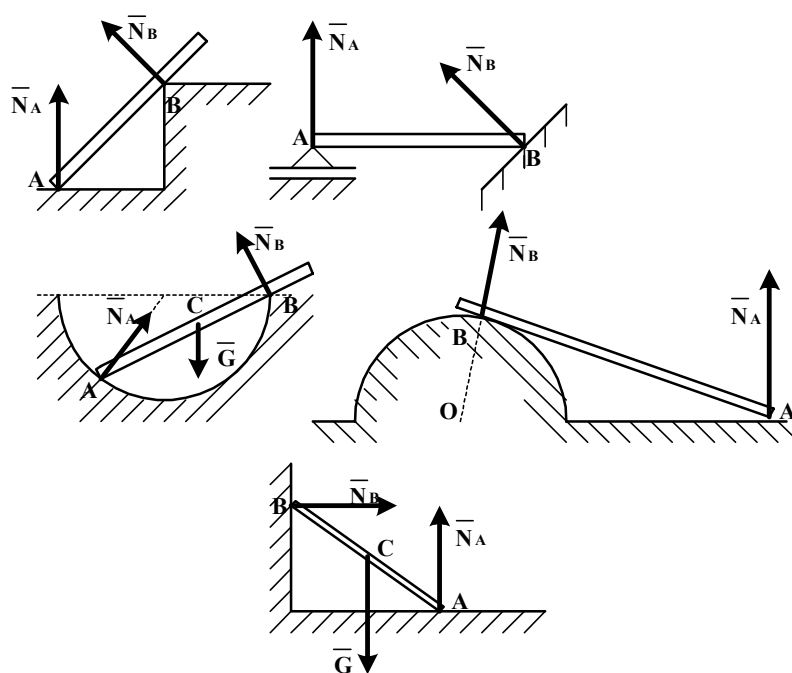


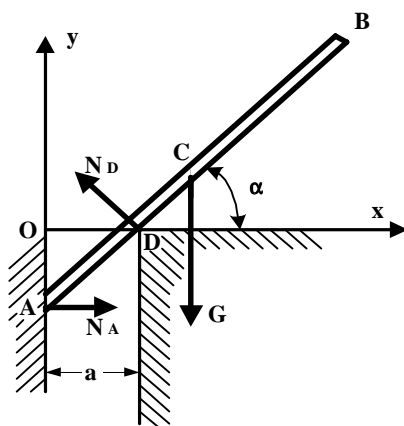
Fig. 6.6

## APLICAȚII

### 1. Enunț

În figură se consideră o bară AB de lungime  $2l$  având greutatea  $\overline{G}$ . Bara este simplu rezemată în punctele A și D. Se cere să se determine unghiul  $\alpha$  pentru care bara AB este în

echilibru și să se calculeze reacțiunile în punctele A și D, cunoscând dimensiunea a.



### Rezolvare

Reazemele simple din punctele A și D se înlocuiesc cu reacțiunile normale la suprafețele de sprijin,  $\bar{N}_A$  respectiv  $\bar{N}_D$ .

Asupra barei de lungime  $2l$  acționează forța de greutate  $\bar{G}$  și cele două reacțiuni.

Condiția de echilibru  $\bar{R} + \bar{R}' = 0$ ,  $\bar{M}_A + \bar{M}'_A = 0$ ,

proiectată pe axele sistemului cartezian de coordonate se scrie

$$\sum_{peOx} (\bar{R} + \bar{R}') = 0 \Leftrightarrow N_A - N_D \sin \alpha = 0$$

$$\sum_{peOy} (\bar{R} + \bar{R}') = 0 \Leftrightarrow N_D \cos \alpha - G = 0$$

$$\sum M_A (\bar{R}; \bar{R}') = 0 \Leftrightarrow N_D \frac{a}{\cos \alpha} - Gl \cos \alpha = 0$$

Prin rezolvarea sistemului de ecuații se obțin soluțiile

$$N_D = \frac{G}{\cos \alpha}$$

$$N_A = N_D \sin \alpha = G \tan \alpha$$

în care,  $\cos \alpha = \sqrt[3]{\frac{a}{1}}$  cu condiția ca  $\sqrt[3]{\frac{a}{1}} \leq 1$  ceea ce arată că echilibrul este posibil numai dacă  $a \leq 1$ .



#### 6.2.2.2. Articulația

##### **Definiția 6.6:**

Se numește *articulație*, legătura unui solid rigid cu un corp material din mediul înconjurător care asigură un contact permanent între suprafețele lor într-un anumit punct fix.

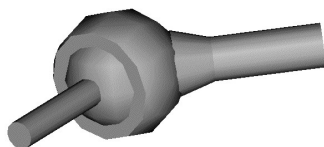
*Articulația* este, deci, legătura prin care un punct al unui solid rigid este obligat să rămână permanent într-un punct fix pe suprafața de sprijin.

*Aspectul geometric.* Corespunzător definiției, un solid rigid articulat într-un punct pe o suprafață de sprijin, are acest punct fix, deci cele trei coordonate ale acestuia sunt fixate. Astfel, rigidul pierde trei grade de libertate, rămânând doar cu trei (cum se va vedea la cinematică, celor trei grade de libertate rămase le corespund trei unghiuri independente, care exprimă posibilitatea rigidului de a avea trei rotații independente în jurul a trei axe perpendiculare, care pot trece, în cazul de față, prin punctul fix).

*Aspectul mecanic.*

Dacă forțele exterioare aplicate asupra solidului rigid au o dispunere spațială fiind orientate după toate cele trei direcții ale unui sistem de referință cartezian, fixarea unui punct al rigidului se face printr-o *articulație sferică*. Așa cum se poate observa și

în Figura 6.7, realizarea tehnică a articulației sferice este reprezentată printr-o sferă, solidară cu rigidul, și montată într-o cavitate sferică fixă. În acest caz, punctul fix în care se realizează articularea este centrul sferei.



**Fig. 6.7**

Exemple: suportul de stilou, schimbătorul de viteze la automobil etc.

Rigidul articulat nu se poate deplasa pe cele trei direcții perpendiculare ce trec prin  $O$ , așa cum se vede în Figura 6.8, ceea ce înseamnă că oricare ar fi forța rezultantă  $\bar{R}$  a sistemului de forțe date, efectul ei este anulat de reacțiunea  $\bar{R}'$  din articulație, fiind valabilă relația

$$\bar{R} + \bar{R}' = 0 \quad (6.8)$$

Deoarece  $\bar{R}$  poate avea orice modul și orice direcție, în baza relației (6.8) și reacțiunea  $\bar{R}'$  din articulație este o forță de modul și direcție oarecare, necunoscute, sau de componente necunoscute  $R'_x$   $R'_y$   $R'_z$ .

$$\bar{R}' = R'_x \bar{i} + R'_y \bar{j} + R'_z \bar{k}$$

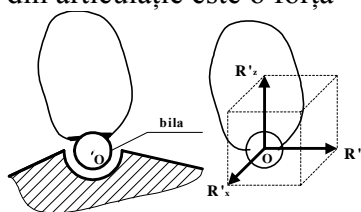


Fig. 6.8

Dacă forțele exterioare aplicate asupra solidului rigid au componente numai pe două direcții în planul ce conține centrul de masă al rigidului, fixarea unui punct al său se face printr-o *articulație cilindrică*. Așa cum se vede și în Figura 6.9, articulația cilindrică se poate realiza tehnic printr-un ax sau bolț (piesă cilindrică), solidar cu rigidul, și montat într-o cavitate cilindrică fixă. În acest caz, axa de simetrie a bolțului este perpendiculară pe planul forțelor, iar punctul fix este poziționat la intersecția dintre ele (axa de simetrie și planul forțelor)

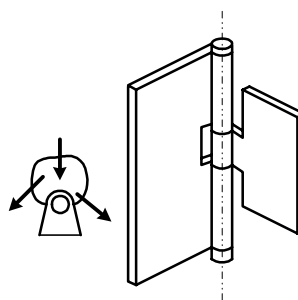


Fig. 6.9

Exemple: balamalele de la o ușă, lagărul unui arbore.

În cazul articulației cilindrice, rigidul nu se poate deplasa pe direcțiile perpendiculare ce trec prin punctul de articulare și se află în planul forțelor, ceea ce înseamnă că, în acest caz,

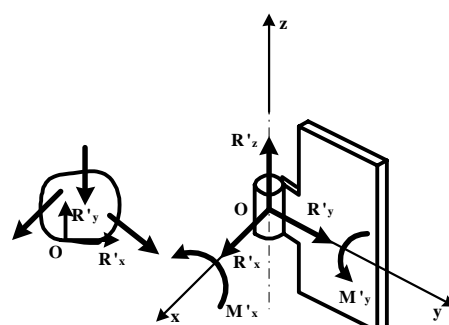


Fig. 6.10

reacțiunea  $\bar{R}'$  din articulație are numai două componente,  $R'_x$  și  $R'_y$ .

$$\bar{R}' = R'_x \bar{i} + R'_y \bar{j}$$

În concluzie, pentru studiul echilibrului solidului rigid, articulația se înlocuiește cu o forță de legătură numită reacțiune  $\bar{R}'$ , de modul, direcție și sens necunoscute.

În ecuațiile de echilibru, articulația introduce ca necunoscută forța de legătură numită reacțiune  $\bar{R}'$ . Astfel, rigidul este considerat liber sub acțiunea forțelor date și a forței de legătură reprezentată de reacțiunea  $\bar{R}'$ .

Ecuatiile vectoriale de echilibru static pentru un solid rigid articulat într-un punct pe o suprafață și acționat de un sistem de forțe exterioare  $\bar{F}_i, i = 1 \dots n$ , se scriu

$$\bar{R} + \bar{R}' = 0; \quad \bar{M}_O + \bar{M}'_O = 0 \quad (6.9)$$

iar, ecuațiile scalare de echilibru, față de un sistem cartezian, sunt

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (F_{xi} + R'_x) &= 0; \quad \sum_{i=1}^n (F_{yi} + R'_y) = 0; \quad \sum_{i=1}^n (F_{zi} + R'_z) = 0 \\ \sum_{i=1}^n M_O(F_{xi}, R'_x) &= 0; \quad \sum_{i=1}^n M_O(F_{yi}, R'_y) = 0; \quad \sum_{i=1}^n M_O(F_{zi}, R'_z) = 0; \end{aligned} \quad (6.10)$$

### Observația 6.3:

Dacă un solid rigid care are o articulație cilindrică este sollicitat de forțe în spațiu (deci, forțele nu se mai află toate într-un plan perpendicular pe axa de simetrie a articulației), atunci, se remarcă faptul că articulația cilindrică, nu permite decât o singură rotație, deci, elimină cinci grade de libertate. Acest fapt

conduce la apariția în articulația cilindrică a unei reacțiuni de modul și direcție necunoscute (trei componente  $R'_x$ ,  $R'_y$ ,  $R'_z$ ) și a două componente de moment  $M'_x$ ,  $M'_y$  care arată că legătura nu permite rotirea în jurul axelor  $Ox$  și  $Oy$ , perpendiculare pe axa articulației cilindrice (v. Figura 6.10).

Exemple de articulații sunt prezentate în Figura 6.11

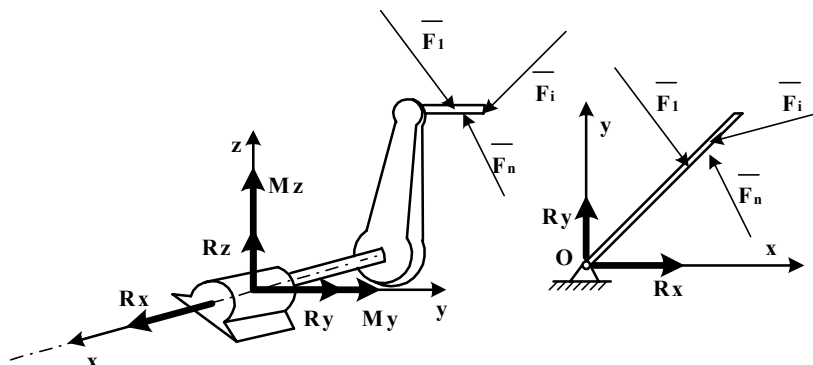
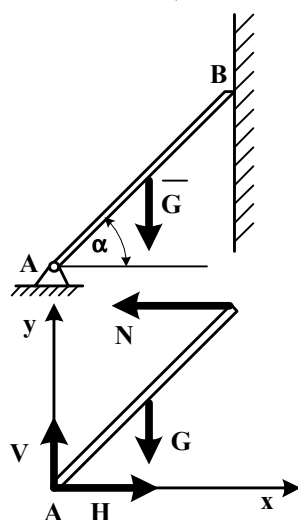


Fig. 6.11

## APLICAȚII



### 2. Enunț

În figura alăturată se consideră o bară AB de lungime  $2l$  având greutatea  $\overline{G}$ .

Bara este articulată în punctul A și simplu rezemată în punctul B. Se cere să se determine reacțiunile introduse de legături în punctele A și B, cunoscând unghiul de înclinare  $\alpha$ , al barei AB față de orizontală.

### Rezolvare

Articulația din punctul A se înlocuiește cu o reacțiune  $\overline{R}'_A$

necunoscută având o componentă în planul vertical,  $V$  și o componentă în planul orizontal,  $H$ . Reazemul simplu din punctul  $B$  se înlocuiește cu reacțiunea  $\bar{R}'_B$  care are componentă numai după direcția normală,  $N$ , la planul vertical de sprijin al barei  $AB$ .

Asupra barei de lungime  $2l$  acționează forța de greutate  $\bar{G}$  și cele două reacțiuni,  $\bar{R}'_A$  și  $\bar{R}'_B$ .

Condiția de echilibru, exprimată de ecuațiile vectoriale  $\bar{R} + \bar{R}' = 0$ ,  $\bar{M}_A + \bar{M}'_A = 0$  și proiectată pe axele sistemului cartezian de coordonate, se scrie

$$\sum_{peOx} (\bar{R} + \bar{R}') = 0 \Leftrightarrow H - N = 0$$

$$\sum_{peOy} (\bar{R} + \bar{R}') = 0 \Leftrightarrow V - G = 0$$

$$\sum M_A (\bar{R}; \bar{R}') = 0 \Leftrightarrow N \cdot 2l \sin \alpha - G \cdot l \cos \alpha = 0$$

Rezolvând, se obține

$$N = \frac{G}{2} \operatorname{ctg} \alpha; \quad H = N = \frac{G}{2} \operatorname{ctg} \alpha; \quad V = G$$

#### 6.2.2.3. Încăstrarea

##### **Definiția 6.7:**

Se numește *încăstrare*, legătura unui solid rigid cu un corp material fix din mediul înconjurător, în raport cu care nu are nici o posibilitate de mișcare (este solidarizat cu acesta).

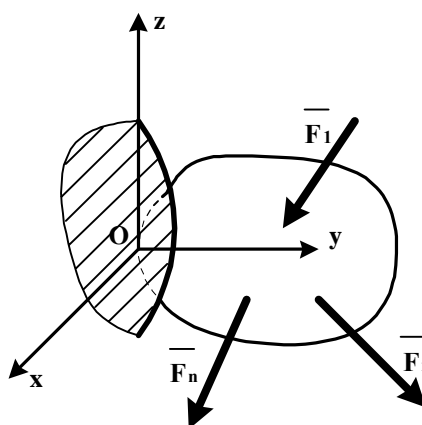
*Încăstrarea* este, deci, legătura prin care solidul rigid pătrunde pe o anumită porțiune într-un corp material considerat fix, în așa fel încât i se suprimă orice posibilitate de mișcare.

*Aspectul geometric.* Corespunzător definiției, un solid rigid încăstrat nu are nici o posibilitate de mișcare și, prin

urmare, pierde toate gradele de libertate.

*Aspectul mecanic.* În Figura 6.12, solidul rigid asupra căruia acționează un sistem de forțe având rezultanta  $\bar{R}$ , este încastrat în punctul teoretic O (în realitate, încastrarea se realizează pe o suprafață de contact). Imobilizarea rigidului se realizează prin fixarea unui număr mare de puncte, în fiecare din ele apărând câte o forță de legătură.

Torsorul forțelor de legătură calculat în raport cu punctul teoretic de încastrare, este format din forța rezultantă de legătură, reacțiunea  $\bar{R}'$  și momentul rezultat de legătură, momentul  $\bar{M}'_O$ , ambele fiind necunoscute atât în modul cât și ca direcție. Oricare ar fi torsorul forțelor exterioare calculat în raport cu punctul teoretic de încastrare,



**Fig. 6.12.**

și care este format din rezultanta forțelor exterioare aplicate  $\bar{R}$  și momentul rezultat  $\bar{M}_O$ , sunt valabile ecuațiile de echilibru,

$$\bar{R} + \bar{R}' = 0; \quad \bar{M}_O + \bar{M}'_O = 0 \quad (6.11)$$

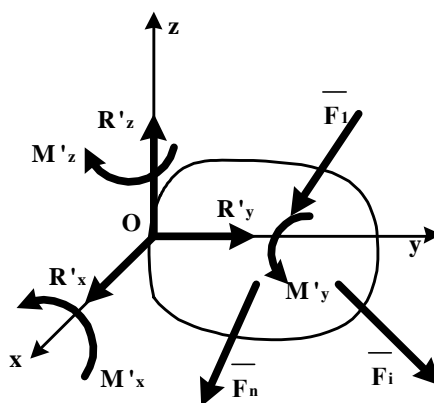
care se pot proiecta pe axele sistemului cartezian de coordonate

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (F_{xi} + R'_x) &= 0; \quad \sum_{i=1}^n (F_{yi} + R'_y) = 0; \quad \sum_{i=1}^n (F_{zi} + R'_z) = 0 \\ \sum_{i=1}^n M_O(F_{xi}, R'_x) &= 0; \quad \sum_{i=1}^n M_O(F_{yi}, R'_y) = 0; \quad \sum_{i=1}^n M_O(F_{zi}, R'_z) = 0; \end{aligned} \quad (6.12)$$

În concluzie, în studiul echilibrului static al solidului rigid, o încastrare se înlocuiește cu o reacțiune  $\bar{R}'$  și un moment  $\bar{M}'_O$ , de module, direcții și sensuri necunoscute, așa cum se vede și în Figura 6.13.

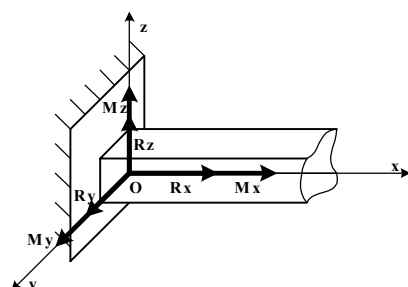
**Observația 6.4:**

Când sistemul forțelor aplicate este orientat în spațiu, încastrarea se numește spațială și se înlocuiește cu șase componente necunoscute (câte trei pentru fiecare vector  $\bar{R}'$  și  $\bar{M}'_O$ ), iar când sistemul forțelor este dirijat în plan, încastrarea se numește plană și se înlocuiește cu două componente pentru



**Fig. 6.13.**

$\bar{R}'$  și o componentă pentru  $\bar{M}'_O$ . În acest ultim caz, vectorul moment  $\bar{M}'_O$  este perpendicular pe planul forțelor și se reprezintă simbolic printr-o săgeată circulară (sensul săgeții indică cum trebuie rotit un burghiu drept aflat pe direcția momentului pentru a înainta în sensul real al lui  $\bar{M}'_O$ ).



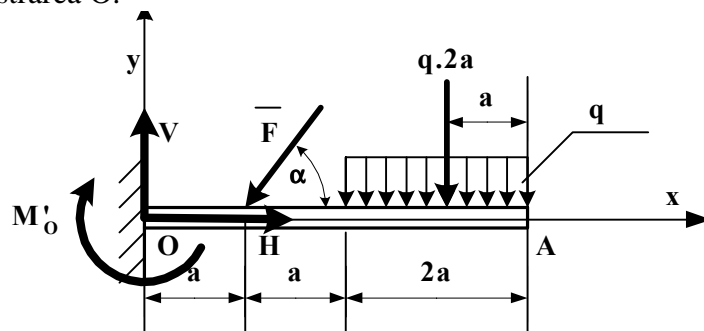
Exemplu de încastrare este prezentat în Figura 6.14.

**Fig. 6.14.**

## APLICAȚII

### 3. Enunț

O bară OA de lungime  $4a$  și greutate neglijabilă este acționată de forța concentrată  $\bar{F}$  și de sarcina  $q$  uniform distribuită pe lungimea  $2a$ . Să se determine reacțiunile din încastrarea O.



### Rezolvare

Forțele date fiind conținute în același plan, încastrarea din punctul O se înlocuiește cu componentele H și V pentru reacțiunea  $\bar{R}'$  și cu o singură componentă,  $M'_O$  pentru moment.

Condiția de echilibru, exprimată de ecuațiile vectoriale  $\bar{R} + \bar{R}' = 0$ ,  $\bar{M}_O + \bar{M}'_O = 0$  și proiectată pe axele sistemului cartezian de coordonate, se scrie

$$\sum_{peOx} (\bar{R} + \bar{R}') = 0 \Leftrightarrow H - F \cos \alpha = 0$$

$$\sum_{peOy} (\bar{R} + \bar{R}') = 0 \Leftrightarrow V - F \sin \alpha - 2qa = 0$$

$$\sum M_O (\bar{R}; \bar{R}') = 0 \Leftrightarrow M'_O + Fa \sin \alpha + 2qa \cdot 3a = 0$$

Rezolvând, se obține

$$H = F \cos \alpha; \quad V = F \sin \alpha + 2qa; \quad M'_O = -Fa \sin \alpha - 6qa^2$$



## 6.2.2.4. Prinderea cu fire

**Definiția 6.8:**

Se numește *prindere cu fire*, legătura unui solid rigid cu un corp material din mediul înconjurător echivalentă cu o rezemare unilaterală a unui punct al solidului considerat, pe o sferă care are raza egală cu lungimea firului.

**Observația 6.5:**

Se consideră că distanța dintre capetele firului nu se poate modifica, firul fiind considerat perfect flexibil și inextensibil.

*Aspectul geometric.* Corespunzător definiției, prinderea unui solid rigid cu un fir este echivalentă, din punctul de vedere al echilibrului mecanic al solidului considerat, cu înlocuirea firului cu o forță de legătură în lungul firului secționat, numită reacțiune sau *tensiune în fir*, care are sensul astfel încât întinde porțiunea de fir legată de rigid. Legătura suprimă solidului rigid un singur grad de libertate.

*Aspectul mecanic.* În Figura 6.15, se consideră un solid rigid de forma unei plăci, supusă acțiunii unui sistem de forțe având rezultanta  $\bar{R}$  și suspendată în punctele A și B prin două fire ancorate de o grindă fixă în punctele C și D.

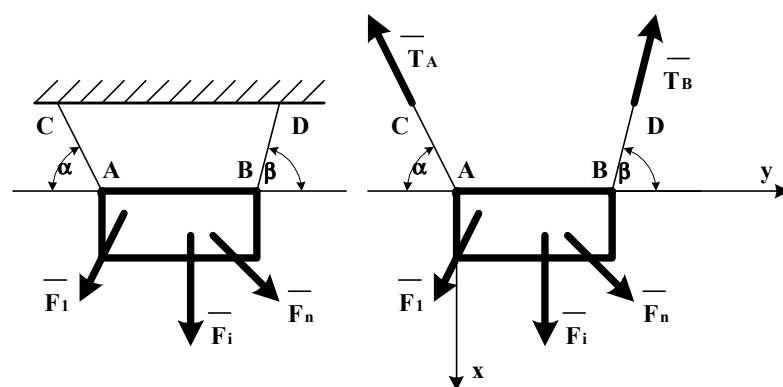


Fig. 6.15.

Legătura din fir introduce o singură necunoscută. În fir ia naștere o forță de legătură denumită tensiune și care are punctul de aplicație în punctul de legare, are direcția dirijată după dreapta suport pe care este întins firul și sensul corespunzător întinderii porțiunii de fir legată de solid.

În concluzie, pentru studiul echilibrului solidului rigid, *firul se înlocuiește cu o forță de legătură numită tensiune și notată de obicei cu  $\bar{T}$ .*

Ecuatiile vectoriale de echilibru static pentru un solid rigid prins cu fire și acționat de un sistem de forțe  $\bar{F}_i, i = 1 \dots n$ , se scriu

$$\bar{R} + \bar{T} = 0; \quad \bar{M}_O(\bar{R}, \bar{T}) = 0 \quad (6.13)$$

care se pot proiecta pe axele sistemului cartezian de coordonate

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (F_{xi} + T_x) = 0; \quad \sum_{i=1}^n (F_{yi} + T_y) = 0; \quad \sum_{i=1}^n (F_{zi} + T_z) = 0; \\ \sum_{i=1}^n M_O(\bar{F}_{xi}, \bar{T}_x) = 0; \quad \sum_{i=1}^n M_O(\bar{F}_{yi}, \bar{T}_y) = 0; \quad \sum_{i=1}^n M_O(\bar{F}_{zi}, \bar{T}_z) = 0; \end{aligned} \quad (6.14)$$

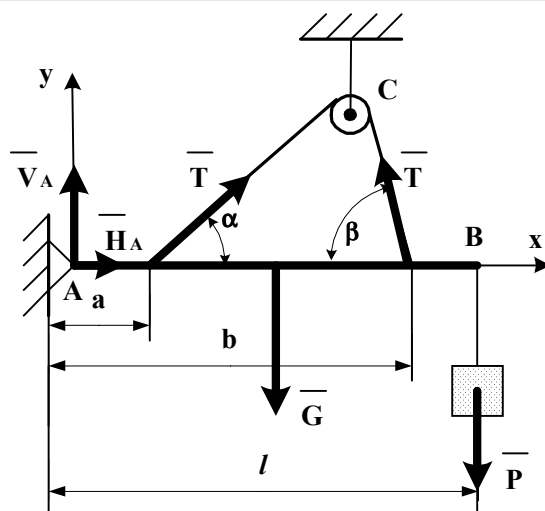
## APLICAȚII

### 4. Enunț

O bară AB de greutate  $\bar{G}$  și lungime  $l$  cunoscute, este articulată în A, așa cum se vede și în figură. De capătul B este atârnată greutatea  $\bar{P}$ , iar la distanțele  $a$  și  $b$  de punctul A, bara este prinsă cu un fir care trece peste scripetele fără frecare C. Se cer reacțiunile din articulație și tensiunea din fir, cunoscând unghiurile  $\alpha$  și  $\beta$  de înclinare ale firului.

### Rezolvare

Se înlocuiește firul cu tensiunea  $\bar{T}$ , iar articulația prin componentele  $H_A$  și  $V_A$  ale reacțiunii  $\bar{R}'$  pe care aceasta o introduce.



Ecuatiile de echilibru static, proiectate pe axele unui sistem cartezian se scriu

$$\sum_{peOx} (\bar{R} + \bar{R}') = 0 \Leftrightarrow H_A + T \cos \alpha - T \cos \beta = 0$$

$$\sum_{peOy} (\bar{R} + \bar{R}') = 0 \Leftrightarrow V_A - G - P + T \sin \alpha + T \sin \beta = 0$$

$$\sum M_O (\bar{R}; \bar{R}') = 0 \Leftrightarrow Ta \sin \alpha + Tb \sin \beta - G \frac{l}{2} - Pl = 0$$

Rezolvând, se obține

$$T = \frac{(G + P)l}{2(a \sin \alpha + b \sin \beta)}$$

$$H_A = \frac{(G + P)l}{2(a \sin \alpha + b \sin \beta)} (\cos \beta - \cos \alpha)$$

$$V_A = G + P - \frac{(G + P)l}{2(a \sin \alpha + b \sin \beta)} (\sin \alpha + \sin \beta)$$

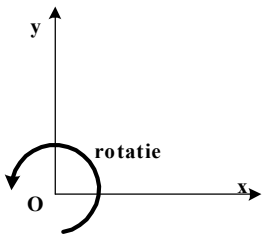
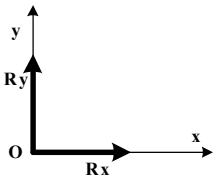
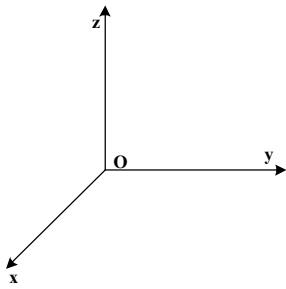
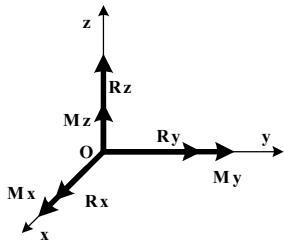
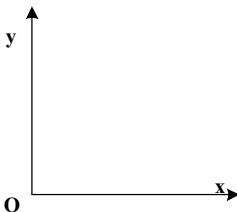
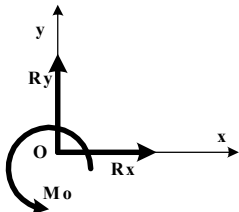
**Observația 6.6:**

Legăturile prezentate sunt legături simple ale solidului rigid (reazemul simplu, articulația, încastrarea). O legătură a unui rigid reduce numărul gradelor de libertate și introduce reacțiuni, așa cum se observă cu ușurință din Tabelul 6.3.

**Tabelul 6.3:** Tipuri de legături simple

Legătura	Grade de libertate	Reacțiuni
Reazem simplu		
Articulație sferică		
Articulație cilindrică în spațiu		

**Tabelul 6.3:** continuare

Legătura	Grade de libertate	Reacțiuni
Articulație cilindrică în plan		
Încăstrare în spațiu		
Încăstrare în plan		

#### 6.2.2.5. Algoritm de calcul al reacțiunilor introduse de legăturile simultane

În mod frecvent, un solid rigid poate fi supus simultan la mai multe tipuri de legături, cum ar fi: articulat și simplu rezemat; articulat și prins cu un fir etc.

Într-un asemenea caz, pentru studiul echilibrului static al solidului rigid se recomandă parcurgerea următorului algoritm de calcul:

➤ se eliberează solidul rigid de toate legăturile și se introduc elementele mecanice (forțe și momente) cores-

punzătoare acestora. Sensul reacțiunilor se alege arbitrar, de regulă, astfel încât în ecuațiile de echilibru, scalarii corespunzători reacțiunilor să fie pozitivi;

- se estimează numărul total de necunoscute scalare pe care le introduc legăturile rigidului, pentru a aprecia dacă problema este static determinată (numărul necunoscutelor este egal cu numărul ecuațiilor scalare de echilibru static care se pot scrie) sau static nedeterminată (se precizează că problema poate fi static nedeterminată și dacă numărul necunoscutelor este egal cu numărul ecuațiilor scalare de echilibru static care se pot scrie);

- se scriu ecuațiile de echilibru static. Ecuațiile de momente se scriu, de obicei, față de legătura care introduce numărul cel mai mare de reacțiuni, deși acest lucru nu este obligatoriu;

- se rezolvă sistemul format de ecuațiile de echilibru static, obținând astfel, expresiile și valorile necunoscutelor. Dacă din calcul, mărimea unei reacțiuni rezultă pozitivă, înseamnă că sensul său a fost ales corect, în caz contrar, fiind necesară alegerea sensului opus pentru reacțiunea respectivă.

**Observația 6.7:**

Dacă problema este static nedeterminată, se recomandă ridicarea nedeterminării prin renunțarea la ipoteza corpului solid rigid și introducerea unui număr de ecuații suplimentare referitoare la deformațiile pe care le suportă corpul material considerat, metodă de rezolvare specifică rezistenței materialelor.

**APLICAȚII**

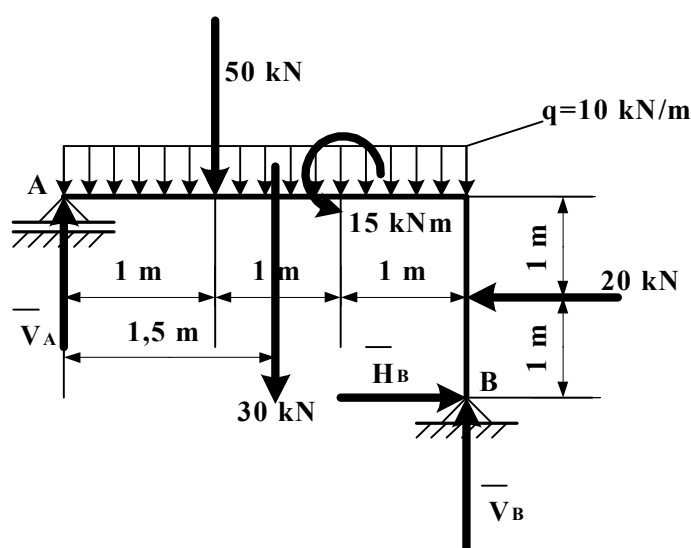
**5. Enunț**

Să se calculeze reacțiunile grinzii cotite din figură.

**Rezolvare**

- se eliberează solidul rigid de legături;

Pentru aceasta, sarcina uniform distribuită  $q = 10 \text{ kN/m}$ , aplicată pe o lungime de 3m, se înlocuiește cu forța concentrată



având mărimea  $Q = 10 \cdot 3 = 30 \text{ kN}$ , aplicată la distanța de 1,5m față de punctul A.

Reazemul simplu din punctul A se înlocuiește cu reacțiunea verticală având mărimea  $V_A$ .

Articulația din punctul B se înlocuiește cu reacțiunile verticală și orizontală având mărimile  $V_B$  respectiv  $H_B$ .

➤ se scriu ecuațiile scalare de echilibru static

$$\sum_{\text{peOx}} (\bar{R} + \bar{R}') = 0 \Leftrightarrow H_B - 20 = 0$$

$$\sum_{\text{peOy}} (\bar{R} + \bar{R}') = 0 \Leftrightarrow V_A - 50 - 30 + V_B = 0$$

$$\sum M_B (\bar{R}; \bar{R}') = 0 \Leftrightarrow -3V_A + 50 \cdot 2 + 30 \cdot 1,5 + 15 + 20 \cdot 1 = 0$$

➤ se rezolvă sistemul de ecuații

$$H_B = 20 \text{ kN}; \quad V_A = 60 \text{ kN}; \quad V_B = 20 \text{ kN}$$

---

### 6.2.3. Echilibrul solidului rigid supus la legături cu frecare

În paragraful anterior, s-au analizat legăturile simple și cele care acționează simultan pentru solidul rigid în ipoteza frecărilor neglijabile, corpurile materiale fiind presupuse nedeformabile și având suprafețe perfect lucii. În acest caz, s-a văzut că reacțiunile care apar, forțe și/sau momente, servesc eliberării solidului rigid de legăturile ideale la care este supus, în vederea studiului echilibrului static.

În practica tehnică, studiul echilibrului static al corpurilor materiale trebuie făcut în condiții de funcționare reale și nu în limitele unor ipoteze idealizate. Corpurile materiale reale prezintă asperități la contactul dintre ele și, ca urmare, apar frecvent și componente disipative ale torsiunilor reacțiunilor în punctul teoretic al legăturii la care este supus solidul rigid, ce se opun deplasărilor relative ale corpurilor materiale. Este deci necesar ca, atunci când se studiază echilibrul static al corpurilor materiale reale, să se țină seama de efectele datorate asperităților și întrepătrunderilor dintre corpuri, efecte numite frecări.

Frecările sunt de atâtea feluri câte tipuri de mișcări relative sunt posibile între corpurile în contact.

Dacă primele componente ale reacțiunilor introduse de legăturile ideale se determină din ecuațiile de echilibru static, componentele disipative se determină din relații stabilite pe cale experimentală și numite uzual legi de frecare. Componentele disipative sunt datorate fenomenelor de frecare care se produc în zonele de legătură între suprafețele în contact și care provoacă disipări de energie. Mărimile acestor componente nu pot depăși anumite valori limită care depind de tipul de legătură, de natura corpurilor în contact și de valoarea componentei ideale a reacțiunii legăturii.

#### 6.2.3.1. Frecările în cazul reazemului simplu

În Figura 6.16 se consideră un solid rigid acționat de un sistem de forțe având rezultanta  $\bar{R}$ .



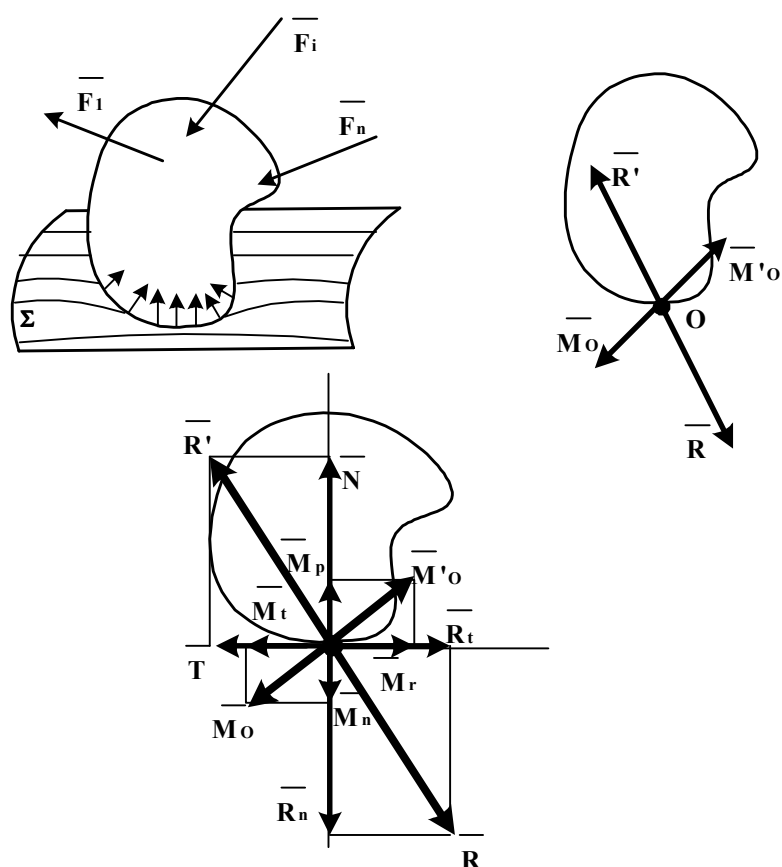


Fig. 6.16

Rigidul este simplu rezemat pe suprafața  $\Sigma$ . Teoretic, există un singur punct de contact,  $O$ , pe această suprafață. În realitate, cele două corpuri se deformează și contactul se realizează pe o suprafață, în fiecare punct de contact, dezvoltându-se o reacțiune de mărime și direcție necunoscută, reacțiunea rezultantă fiind  $\vec{R}'$ .

Reducând sistemul de forțe aplicate,  $\vec{F}_1$  și reacțiunea  $\vec{R}'$  în raport cu punctul teoretic de contact, se obțin ecuațiile vectoriale de echilibru static.

$$\bar{\mathbf{R}} + \bar{\mathbf{R}}' = 0; \quad \bar{\mathbf{M}}_O + \bar{\mathbf{M}}'_O = 0 \quad (6.15)$$

Proiectând relațiile (6.15) pe normala în O la suprafața teoretică de contact  $\Sigma$  și pe planul tangent la această suprafață, se scrie:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{R}}_n + \bar{\mathbf{N}} &= 0; \quad \bar{\mathbf{R}}_t + \bar{\mathbf{T}} = 0 \\ \bar{\mathbf{M}}_n + \bar{\mathbf{M}}_p &= 0; \quad \bar{\mathbf{M}}_t + \bar{\mathbf{M}}_r = 0 \end{aligned} \quad (6.16)$$

În baza teoremei de echivalență, rezultanta  $\bar{\mathbf{R}}$  se descompune în componentele  $\bar{\mathbf{R}}_n$  și  $\bar{\mathbf{R}}_t$  dirijate după direcția normalei în O la suprafața teoretică de contact  $\Sigma$  respectiv tangentei la această suprafață. Aceste componente dau cuplurile de momente  $\bar{\mathbf{M}}_n = \bar{\mathbf{M}}_O(\bar{\mathbf{R}}_n)$  respectiv  $\bar{\mathbf{M}}_t = \bar{\mathbf{M}}_O(\bar{\mathbf{R}}_t)$ .

În baza aceleiași teoreme, reacțiunea  $\bar{\mathbf{R}}'$  se descompune, după aceleași direcții, așa cum se vede și în Figura 6.16, în componentele  $\bar{\mathbf{N}}$  și  $\bar{\mathbf{T}}$  care dau cuplurile de momente  $\bar{\mathbf{M}}_p = \bar{\mathbf{M}}_O(\bar{\mathbf{N}})$  respectiv  $\bar{\mathbf{M}}_r = \bar{\mathbf{M}}_O(\bar{\mathbf{T}})$ .

Forța  $\bar{\mathbf{R}}_n$  tinde să deplaseze corpul în direcția normală la suprafața de contact, deplasare căreia i se opune reacțiunea normală  $\bar{\mathbf{N}}$ . Forța  $\bar{\mathbf{R}}_t$  tinde să deplaseze corpul în planul tangent la suprafața de contact. Această deplasare se numește *alunecare* și ei i se opune reacțiunea  $\bar{\mathbf{T}}$ , numită *forță de frecare de alunecare*.

Cuplul de moment  $\bar{\mathbf{M}}_n = \bar{\mathbf{M}}_O(\bar{\mathbf{R}}_n)$ , are tendința de a roti corpul în jurul normalei la suprafața de contact. Această mișcare de rotație se numește *pivotare* și este împiedicată de cuplul de moment  $\bar{\mathbf{M}}_p = \bar{\mathbf{M}}_O(\bar{\mathbf{N}})$ , numit *cuplu de frecare de pivotare*. Cuplul de moment  $\bar{\mathbf{M}}_t = \bar{\mathbf{M}}_O(\bar{\mathbf{R}}_t)$ , are tendința de a roti corpul în jurul unei axe din planul tangent la suprafața de contact. Această mișcare de rotație se numește *rostogolire* și este

împiedicată de cuplul de moment  $\bar{M}_r = \bar{M}_O(\bar{T})$ , numit *cuplu de frecare de rostogolire*.

Se poate concluziona că într-un reazem simplu pot apărea trei tipuri de frecări calitativ diferite:

- de alunecare;
- de rostogolire.
- de pivotare;

### Frecarea de alunecare

Frecarea de alunecare nu este calitativ diferită de cea din cazul punctului material. Reluând rezultatele obținute atunci, se observă că și în cazul rigidului, frecarea se manifestă printr-o forță  $\bar{T}$ , tangentă la suprafață, care se opune tendinței de alunecare și a cărei mărime nu poate depăși o anumită valoare impusă de legea lui Coulomb dată de relația (5.16).

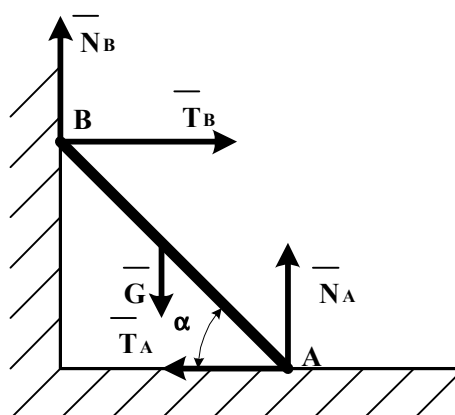
$$T \leq \mu N$$

O situație aparte o constituie rezemarea solidului rigid în mai multe puncte, ceea ce conduce la existența mai multor inegalități de forma (5.16), deci la apariția unor dificultăți sporite de calcul, precum și a unor probleme privind determinarea corectă a tendințelor de deplasare în diferitele puncte de rezemare.

### APLICAȚII

#### 6. Enunț

În figura alăturată, bara AB situată într-un plan vertical, având lungimea  $l$  și greutatea  $G$ , este sprijinită cu frecare în



punctul A pe un plan orizontal și în punctul B pe un plan vertical, coeficienții de frecare fiind  $\mu_1$  respectiv  $\mu_2$ .

Se cere să se determine unghiul  $\alpha$  pentru care bara AB rămâne în echilibru static.

### Rezolvare

După eliberarea barei AB de legăturile la care este supusă, se pot scrie ecuațiile scalare de echilibru după cum urmează

$$\sum_{peOx} (\bar{R} + \bar{R}') = 0 \Leftrightarrow N_B - T_A = 0$$

$$\sum_{peOy} (\bar{R} + \bar{R}') = 0 \Leftrightarrow N_A + T_B - G = 0$$

$$\sum M_B (\bar{R}; \bar{R}') = 0 \Leftrightarrow G \frac{l}{2} \cos \alpha - N_B l \sin \alpha - T_B l \cos \alpha = 0$$

$$T_A \leq \mu_1 N_A$$

$$T_B \leq \mu_2 N_B$$

Prin rezolvare se obține

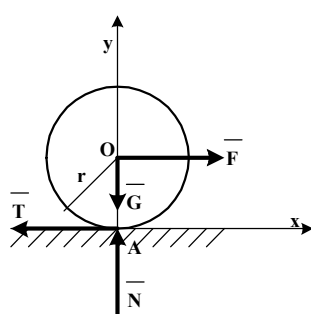
$$\operatorname{tg} \alpha \geq \frac{1 - \mu_1 \mu_2}{2\mu_1} \text{ sau } \alpha \geq \arctg \frac{1 - \mu_1 \mu_2}{2\mu_1}$$

### Frecarea de rostogolire

Pentru exemplificare, se consideră o roată de rază  $r$  și greutate proprie  $\bar{G}$ , pentru care se presupune că se realizează contactul cu un plan orizontal într-un singur punct, A, așa cum se vede în Figura 6.17.

Se pune problema determinării forței  $\bar{F}$ , orientată ca în figură, pentru care roata considerată rămâne în repaus.

În această situație, ecuațiile scalare de echilibru care se pot scrie, sunt:



$$\sum_{peOx} (\bar{R} + \bar{R}') = 0 \Leftrightarrow F - T = 0$$

$$\sum_{peOy} (\bar{R} + \bar{R}') = 0 \Leftrightarrow N - G = 0 \quad (6.17)$$

$$\sum M_A (\bar{R}; \bar{R}') = 0 \Leftrightarrow -F \cdot r = 0$$

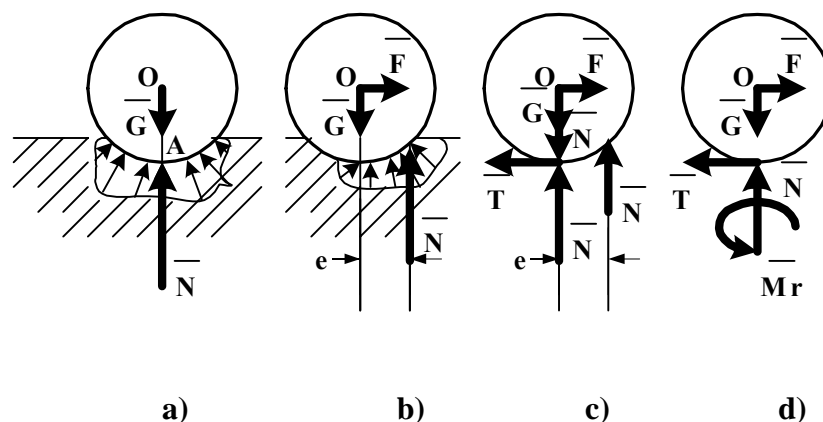
**Fig. 6.17.**

Se poate observa cu ușurință că, prin rezolvarea sistemului de ecuații (6.17), se obține  $F = 0$ , ceea ce înseamnă că pentru orice forță  $\bar{F}$ , având o mărime oricât de mică, roata se pune în mișcare.

În realitate, din cauza deformabilității, contactul dintre roată și plan nu se realizează în punctul teoretic de rezemare A, ci, așa cum se arată în Figura 6.18, pe o mică suprafață,

➤ simetrică în raport cu suportul forței de greutate proprie a roții,  $\bar{G}$ , dacă roata nu este acționată și de forța orizontală  $\bar{F}$  (v. Figura 6.18 a);

➤ asimetrică în raport cu suportul forței de greutate proprie a roții,  $\bar{G}$ , dacă roata considerată este acționată și de forța orizontală  $\bar{F}$  (v. Figura 6.18 b).



**Fig. 6.18.**

Suportul rezultantei  $\bar{N}$  a reacțiunilor normale se află la o distanță,  $e$ , de punctul teoretic de contact, A. Suportul rezultantei  $\bar{T}$  a reacțiunilor tangențiale se consideră a trece prin punctul A (Figura 6.18 c). Ținând seama de regulile de reducere a sistemelor de forțe, se poate spune că forțele de legătură, în acest caz, sunt echivalente cu forțele  $\bar{T}$  și  $\bar{N}$  aplicate în punctul teoretic de contact, A, și cu momentul de frecare de rostogolire,  $M_r = N \cdot e$  (Figura 6.18 d). Ecuatiile scalare de echilibru, de această dată, se scriu

$$\begin{aligned}\sum_{peOx} (\bar{R} + \bar{R}') &= 0 \Leftrightarrow F - T = 0 \\ \sum_{peOy} (\bar{R} + \bar{R}') &= 0 \Leftrightarrow N - G = 0 \\ \sum M_A (\bar{R}; \bar{R}') &= 0 \Leftrightarrow M_r - F \cdot r = 0\end{aligned}\quad (6.18)$$

Prin rezolvarea sistemului de ecuații (6.18), se ajunge la concluzia că dacă mărimea forței  $\bar{F}$  depășește o anumită valoare limită, roata începe să se miște, deci momentul de frecare de rostogolire,  $M_r$  este limitat, fiind valabile relațiile

$$M_r \leq \mu_r N \text{ sau } N \cdot e \leq \mu_r \cdot N \quad (6.19)$$

ceea ce este echivalent cu

$$e \leq \mu_r \quad (6.20)$$

în care,  $\mu_r$  reprezintă coeficientul de frecare de rostogolire, iar  $e$  reprezintă distanța maximă cu care se poate deplasa, paralel cu ea însăși, reacțiunea normală  $\bar{N}$  față de punctul teoretic de contact.

În problemele de frecare de rostogolire se cunosc următoarele condiții:

➤  $M_r \leq \mu_r N$ ;  $T \leq \mu N$ , roata nu se rostogolește și nu alunecă, ea aflându-se în repaus;

➤  $M_r = \mu_r N$ ;  $T \leq \mu N$ , roata se rostogolește fără să alunece sau se află în poziție de repaus, la limită, înainte de a începe să se rostogolească;

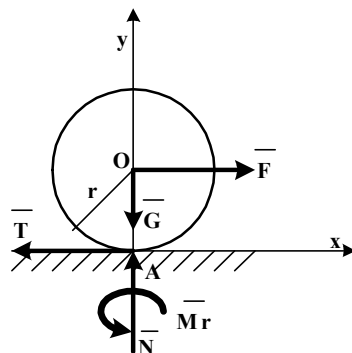
➤  $M_r \leq \mu_r N$ ;  $T = \mu N$ , roata alunecă și nu se rostogolește sau se află în poziție de repaus, la limită, înainte de a începe să alunece;

➤  $M_r = \mu_r N$ ;  $T = \mu N$ , roata alunecă și se rostogolește în același timp, sau se află în poziție de repaus, la limită, înainte de a începe să alunece și să se rostogolească în același timp.

## APLICAȚII

### 7. Enunț (Roata trasă)

Se consideră o roată de rază  $r$  și greutate proprie  $\bar{G}$ , acționată de forța  $\bar{F}$  așa cum se vede în figura alăturată. Cunoscând coeficienții de frecare de alunecare,  $\mu$  și de rostogolire,  $\mu_r$ , se cere valoarea forței  $\bar{F}$  pentru realizarea echilibrului static.



### Rezolvare

Pentru roata trasă considerată, se pot scrie următoarele ecuații scalare de echilibru static

$$\sum_{peOx} (\bar{R} + \bar{R}') = 0 \Leftrightarrow F - T = 0$$

$$\sum_{peOy} (\bar{R} + \bar{R}') = 0 \Leftrightarrow N - G = 0$$

$$\sum M_A (\bar{R}; \bar{R}') = 0 \Leftrightarrow M_r - F \cdot r = 0$$

$$M_r \leq \mu_r N$$

$$T \leq \mu N$$

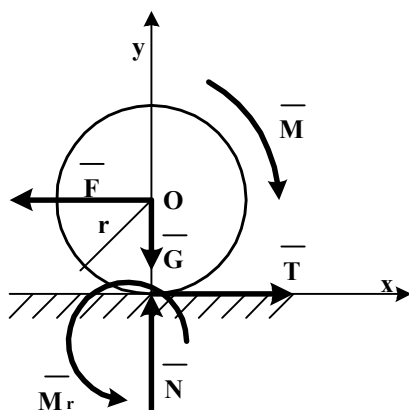
Rezolvând sistemul de ecuații se obțin condițiile:

- condiția ca roata să nu se rostogolească,  $F \leq \frac{\mu_r}{r} G$ ;
- condiția ca roata să nu alunece  $F \leq \mu G$ .

Pentru realizarea echilibrului static, forța  $\vec{F}$  trebuie să aibă mărimea mai mică decât cea mai mică dintre cele două expresii anterioare.

### 8. Enunț (roata motoare)

Se consideră o roată de rază  $r$  și greutate proprie  $\vec{G}$ , acționată de cuplul motor  $\vec{M}$  și de forța  $\vec{F}$  ca în



figură. Cunoșcând coeficienții de frecare de alunecare,  $\mu$  și de rostogolire,  $\mu_r$ , se cere momentul motor  $\vec{M}$  necesar pentru a pune roata în mișcare și condiția pentru ca remorcarea să fie posibilă.

### Rezolvare

Pentru roata motoare considerată, se pot scrie următoarele ecuații scalare de echilibru static:

$$\sum_{peOx} (\vec{R} + \vec{R}') = 0 \Leftrightarrow T - F = 0$$

$$\sum_{peOy} (\vec{R} + \vec{R}') = 0 \Leftrightarrow N - G = 0$$

$$\sum M_A (\vec{R}; \vec{R}') = 0 \Leftrightarrow F \cdot r + M_r - M = 0$$

$$M_r \leq \mu_r N$$

$$T \leq \mu N$$

Prin rezolvare se obțin condițiile:



$$M \leq F \cdot r + \mu_r G$$

$$F \leq \mu G$$

Pentru a pune roata în mișcare, este necesar ca momentul motor să aibă mărimea  $M = F \cdot r + \mu_r G$ , dar pentru a împiedica patinarea roții, este necesar, în mod suplimentar, ca greutatea proprie a roții să fie apreciabilă, iar frecarea de alunecare să fie suficient de mare, deci  $F \leq \mu G$ .

**Observația 6.7:**

Coeficientul de frecare de rostogolire este o mărime care are dimensiunile unei lungimi și valoarea sa depinde de raza roții și de starea suprafețelor în contact, așa cum se ilustrează în Tabelul 6.4.

**Tabelul 6.4:**

Valorile coeficientului de frecare de rostogolire

Material	Coeficientul de frecare de rostogolire $\mu_r$ [cm]	Observații
fier pe fier	0,005	-
oțel moale pe oțel moale	0,005	-
lemn pe lemn	0,05-0,06	esență tare
lemn pe oțel	0,03-0,04	esență tare
fontă pe lemn	0,046	esență tare
bilă de oțel călit pe oțel	0,001	palier plat
bilă de oțel călit pe oțel	0,0005	palier sferic
roți de vagoane pe șine (la frânare normală)	0,05-0,1	în funcție de raza roții, $r$ $\mu_r \approx 0,0065 \cdot r$
roți de cauciuc pe beton	0,315	la viteză obișnuită
roți de trăsură pe pavaj	1,8-2,5	la viteză obișnuită

### Frecarea de pivotare

Frecarea de pivotare este un fenomen cu multe aplicații în tehnică, el stând la baza funcționării ambreiajelor, a pivoților de macara, a frânelor cu disc, a lagărelor cu inele etc.

Cel mai frecvent, mișcarea de pivotare apare în cazul arborilor verticali, având secțiunea sub formă circulară sau, în cazul arborilor de dimensiuni mari, sub formă de coroană circulară, așa cum se arată în Figura 6.19.

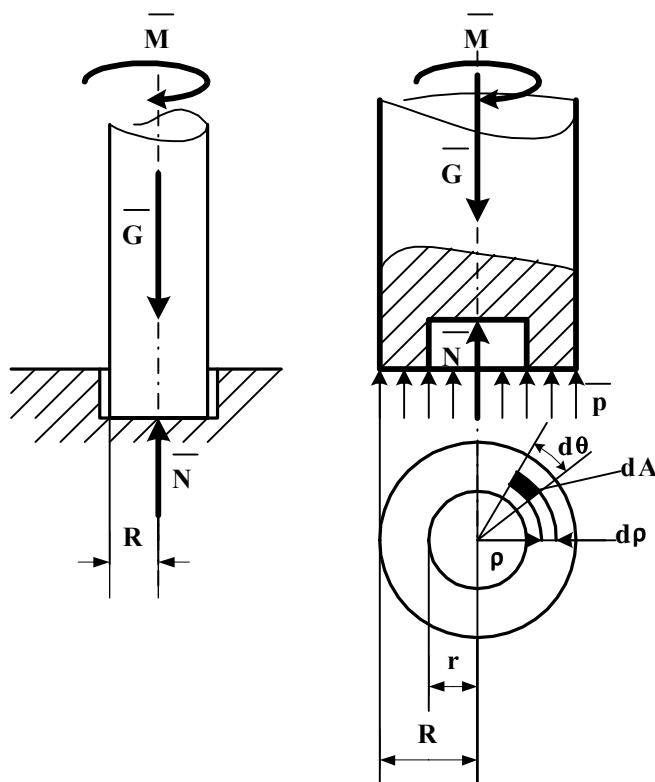


Fig. 6.19.

Considerând coeficientul de frecare de alunecare,  $\mu$ , între arbore și lagăr și presiunea,  $p$ , uniform exercitată pe toată suprafața de sprijin, se poate scrie

$$p = \frac{N}{A} = \frac{N}{\pi(R^2 - r^2)} \quad (6.21)$$

în care s-a notat cu  $N$  mărimea reacțiunii normale la suprafața de sprijin, iar cu  $R$  și  $r$  razele coroanei circulare.

Așa cum se observă și în Figura 6.19, s-a considerat un element din suprafața coroanei circulare, de arie

$$dA = \rho \cdot dp \cdot d\theta \quad (6.22)$$

reacțiunea normală corespunzătoare acestui element fiind

$$dN = p \cdot dA = p \cdot \rho \cdot dp \cdot d\theta \quad (6.23)$$

iar forța de frecare elementară, tangentă la cercul de rază  $\rho$  și având sensul invers tendinței de mișcare, este

$$dT = \mu dN = \mu p \cdot \rho \cdot dp \cdot d\theta \quad (6.24)$$

În aceste condiții, momentul de frecare de pivotare elementar este

$$dM_p = \rho dT = \mu p \cdot \rho^2 \cdot dp \cdot d\theta \quad (6.25)$$

Momentul de pivotare pentru toată suprafața coroanei circulare este

$$M_p = \int_S dM_p = \mu p \int_0^{2\pi} d\theta \int_r^R \rho^2 dp = 2\pi \cdot \mu p \frac{R^3 - r^3}{3} \quad (6.26)$$

sau, dacă se ține cont de relația (6.21),

$$M_p = \frac{2}{3} \mu \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2} N \quad (6.27)$$

Pentru echilibru trebuie îndeplinită condiția

$$M_p \leq \frac{2}{3} \mu \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2} N \quad (6.28)$$

În cazul secțiunii circulare,  $r = 0$  și

$$M_p = \frac{2}{3} \mu R \cdot N \quad (6.29)$$

Pentru echilibru trebuie îndeplinită condiția

$$M_p \leq \frac{2}{3} \mu R \cdot N \quad (6.30)$$

#### 6.2.3.2. Frecările în cazul lagărelor și articulațiilor

Acest tip de frecări reprezintă un fenomen deosebit de complex, care apare la mișcarea fusurilor mobile în lagărele radiale fixe, a rotelor mobile pe fusuri fixe etc.

##### **Observația 6.8:**

Se vor avea în vedere doar problemele legate de frecarea uscată care, deși nu se realizează practic, permite determinarea relației momentului cuplului de frecare din lagăre și articulații. În realitate, utilizarea lubrifianților modifică esențial această problemă și implicit rezolvarea ei, fiind necesară utilizarea ecuațiilor de mișcare ale fluidelor vâscoase.

##### **Frecarea în articulații**

Așa cum se cunoaște deja, articulația permite unui solid rigid să efectueze numai mișcări de rotație în jurul unui punct fix.

În Figura 6.20 s-a considerat un solid rigid articulat în punctul fix  $O$ . Asupra rigidului acționează un sistem de forțe al căror torsesor de reducere în punctul de articulare este dat de vectorul forță rezultantă  $\vec{R}$  și de vectorul moment rezultant  $\vec{M}_O$ .

Experiențele efectuate în mod sistematic au arătat că sub acțiunea cuplului de moment  $\vec{M}_O$ , situat într-un plan perpendicular pe axa de rotație, solidul rigid nu se rotește până

când mărimea cuplului aplicat nu depășește o anumită valoare limită.

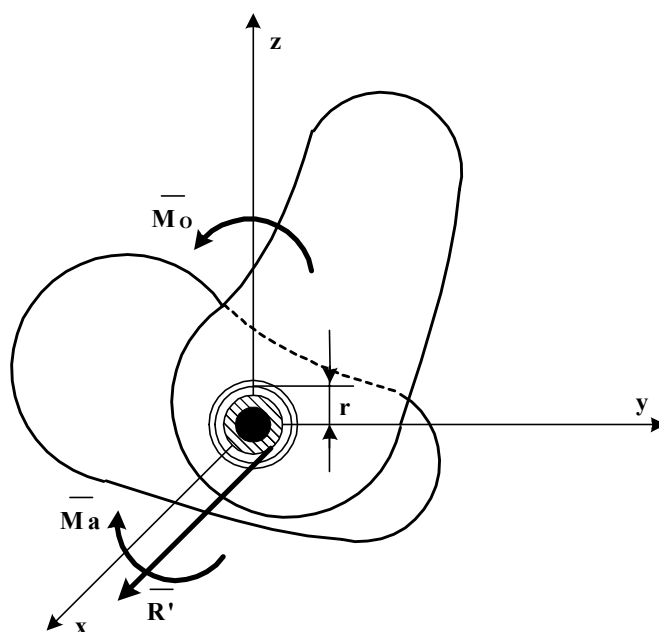


Fig. 6.20.

Explicația este dată de apariția forțelor de frecare pe suprafețele în contact, ca urmare a neregularităților acestora și a deformațiilor care se produc în articulație. Aceste forțe de frecare generează un cuplu de moment  $\vec{M}_a$ , numit *cuplu de frecare în articulație*.

Mărimea acestui cuplu nu poate depăși valoarea, determinată experimental,

$$M_a \leq \mu_a \cdot r \cdot R' \quad (6.31)$$

Eliberând solidul rigid de legătura din punctul O prin introducerea reacțiunii  $\vec{R}'$  și scriind torsiul de reducere al forțelor aplicate și al forțelor de legătură în raport cu punctul de

articulare, se obțin condițiile de echilibru static exprimate de ecuațiile vectoriale

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{R}} + \bar{\mathbf{R}}' &= 0 \\ \bar{\mathbf{M}}_O + \bar{\mathbf{M}}'_O &= 0\end{aligned}\quad (6.32)$$

care se pot proiecta pe axele sistemului de coordonate

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n F_{xi} + R'_x &= 0; \quad \sum_{i=1}^n F_{yi} + R'_y = 0; \quad \sum_{i=1}^n F_{zi} + R'_z = 0 \\ \sum_{i=1}^n M_O(F_{xi}; R'_x) &= 0; \quad \sum_{i=1}^n M_O(F_{yi}; R'_y) = 0; \quad \sum_{i=1}^n M_O(F_{zi}; R'_z) = 0\end{aligned}\quad (6.33)$$

Pentru rezolvarea problemelor ridicate de echilibrul solidului rigid considerat, articulat în punctul O, și care necesită determinarea mărimilor reacțiunii  $\bar{\mathbf{R}}'$  și a momentului cuplului de frecare  $\bar{\mathbf{M}}_a$ , relațiilor (6.32) respectiv (6.33) li se adaugă condiția dată de relația (6.31).

### Frecarea în lagărele de alunecare

Este cunoscut faptul că arborii și osiile se sprijină, pentru asigurarea unei bune funcționări, pe lagăre. Porțiunile din arbori sau din osii care vin în contact cu lagărele se numesc fusuri. După felul lagărului folosit, în timpul rotației fusului, poate avea loc o alunecare (cazul lagărelor de alunecare) sau o rostogolire (cazul lagărelor de rostogolire).

#### a) Frecarea în lagărele de alunecare cu joc

Lagărele de alunecare cu joc, nu realizează strângere la contactul dintre fusul arborelui și lagăr. În acest caz, contactul se realizează, teoretic, într-un punct, A, ca în Figura 6.21.

Asupra fusului arborelui acționează un sistem de forțe exterioare al căror torsor de reducere în raport cu centrul O al

fusului este dat de vectorul forță rezultantă  $\bar{R}$  și de vectorul moment rezultat  $\bar{M}_O$ .

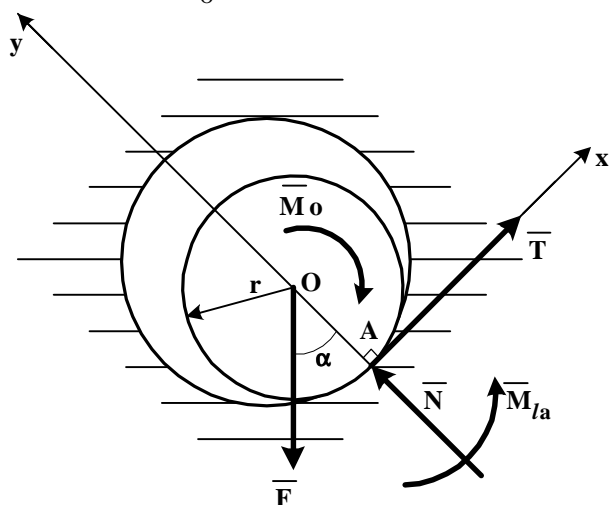


Fig. 6. 21.

Deoarece vectorul  $\bar{M}_O$  este orientat după axa fusului, el are tendința de a imprima acestuia o mișcare de rotație căreia i se opune *cuplul de frecare din lagărul de alunecare cu joc*, de moment  $\bar{M}_{la}$ .

Este important să se observe că datorită jocului dintre fus și lagăr, fusul poate fi asimilat cu o roată rezemată pe o suprafață curbă.

Eliberând legătura din punctul A prin introducerea reacțiunilor  $\bar{N}$  și  $\bar{T}$  și scriind tursorul de reducere al forțelor aplicate și al forțelor de legătură în raport cu centrul O al fusului, se obțin condițiile de echilibru static exprimate de ecuațiile vectoriale

$$\begin{aligned}\bar{R} + \bar{R}' &= 0 \\ \bar{M}_O + \bar{M}'_O &= 0\end{aligned}\tag{6.34}$$

Ținând seama că s-a notat cu  $r$  raza fusului, relațiile (6.34), proiectate pe axele sistemului de coordonate, se scriu

$$\begin{aligned}\sum_{peOx} (\bar{R} + \bar{R}') &= 0 \Leftrightarrow T - F \sin \alpha = 0 \\ \sum_{peOy} (\bar{R} + \bar{R}') &= 0 \Leftrightarrow N - F \cos \alpha = 0 \\ \sum M_A (\bar{R}; \bar{R}') &= 0 \Leftrightarrow M_{la} - M_O + F \cdot r \sin \alpha = 0\end{aligned}\quad (6.35)$$

Pentru rezolvarea problemelor ridicate de echilibrul arborelui considerat, rezemat cu joc în punctul A într-un lagăr de alunecare, și care necesită determinarea mărimilor reacțiunii  $\bar{R}'$  și a momentului cuplului de frecare  $\bar{M}_{la}$ , relațiilor (6.35) li se adaugă condițiile

$$\begin{aligned}T &\leq \mu N \\ M_{la} &\leq \mu_r N\end{aligned}\quad (6.36)$$

Prin rezolvare se obțin următoarele soluții

$$\begin{aligned}T &= F \sin \alpha \\ N &= F \cos \alpha \\ M_{la} &= M_O (\bar{R}) - F \cdot r \sin \alpha\end{aligned}\quad (6.37)$$

care, introduse în inecuațiile date de relațiile (6.36) conduc la condițiile de echilibru

$$\begin{aligned}tg \alpha &\leq \mu \\ M_O &\leq F \cdot r \left( \sin \alpha + \frac{\mu_r}{r} \cos \alpha \right)\end{aligned}\quad (6.38)$$

În cazul echilibrului la limită și pentru valori foarte mici ale unghiului  $\alpha$ , relația (6.38) se poate aproxima cu relația (6.39)



$$\operatorname{tg} \alpha = \mu$$

$$M_O \leq F \cdot r \left( \mu + \frac{\mu_r}{r} \right) = F \cdot r \cdot \mu_{la} \quad (6.39)$$

în care s-a notat cu  $\mu_{la} = \mu + \frac{\mu_r}{r}$  coeficientul de frecare în cazul lagărelor de alunecare cu joc.

Conform principiului acțiunii și reacțiunii, momentul cuplului de frecare din lagărul de alunecare cu joc,  $\overline{M}_{la}$  este egal în modul și are sensul opus vectorului moment rezultat  $\overline{M}_O$ , iar reacțiunea  $\overline{R}'$  introdusă de forțele de legătură, este egală în modul și de sens opus rezultantei forțelor aplicate,  $\overline{R}$ . Prin urmare, este valabilă relația

$$M_{la} \leq R' \cdot r \cdot \mu_{la} \quad (6.40)$$

### b) Frecarea în lagărele de alunecare fără joc

Lagărele de alunecare fără joc (sau cu strângere), realizează contactul dintre fusul arborelui și lagăr pe întreaga periferie a fusului, în fiecare punct teoretic de contact,  $A_i$ ,  $i=1 \dots n$ , acționând o reacțiune normală  $\overline{N}_i$ ,  $i=1 \dots n$  și o forță de frecare de alunecare  $\overline{T}_i$ ,  $i=1 \dots n$ , așa cum se arată în Figura 6.22.

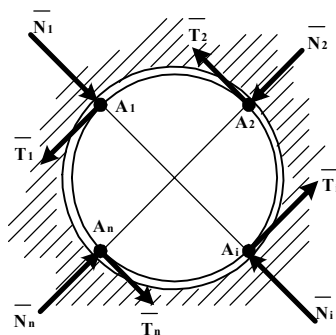


Fig. 6.22.

Forțele de frecare se reduc la un cuplu, numit *cuplu de frecare în lagărele de alunecare fără joc*, al cărui moment este

$$M_{la} = \sum_{i=1}^n r \cdot T_i = \mu \cdot r \sum_{i=1}^n N_i \quad (6.41)$$

în care,  $r$  reprezintă raza fusului arborelui iar  $\mu$  reprezintă coeficientul de frecare de alunecare.

Relația (6.41) se mai poate scrie

$$M_{la} = \mu \cdot r \frac{\sum_{i=1}^n N_i}{R'} R' = \mu_{la} \cdot r \cdot R' \quad (6.42)$$

în care,  $R'$  reprezintă reacțiunea din lagăr în ipoteza că nu există

frecare, iar  $\mu_{la} = \mu \frac{\sum_{i=1}^n N_i}{R'}$  se numește coeficient de frecare în cazul lagărelor de alunecare fără joc.

#### Observația 6.9:

Expresia coeficientului de frecare în cazul lagărelor de alunecare depinde de legea de variație a reacțiunilor normale  $\bar{N}_i$ ,  $i=1\dots n$ , pe suprafața de contact dintre fus și lagăr și se determină experimental.

#### c) Frecarea în lagărele de rostogolire

În Figura 6.23 a) s-a considerat un punct de contact,  $A_i$ ,  $i=1\dots n$ , între fusul unui arbore și una din bilele rulmentului pe care se sprijină arborele în timpul funcționării. În punctul considerat se dezvoltă o reacțiune normală  $\bar{N}_i$ ,  $i=1\dots n$ , o forță de frecare  $\bar{T}_i$ ,  $i=1\dots n$  și un cuplu de rostogolire având momentul  $\bar{M}_{ri}$ ,  $i=1\dots n$ .

Considerând că raza fusului arborelui este  $r$ , *cuplul de frecare în lagărele de rostogolire* are un moment care se

determină din ecuația de momente în raport cu centrul O al fusului

$$M_{lr} = \sum_{i=1}^n (T_i \cdot r + M_{ri}) \quad (6.43)$$

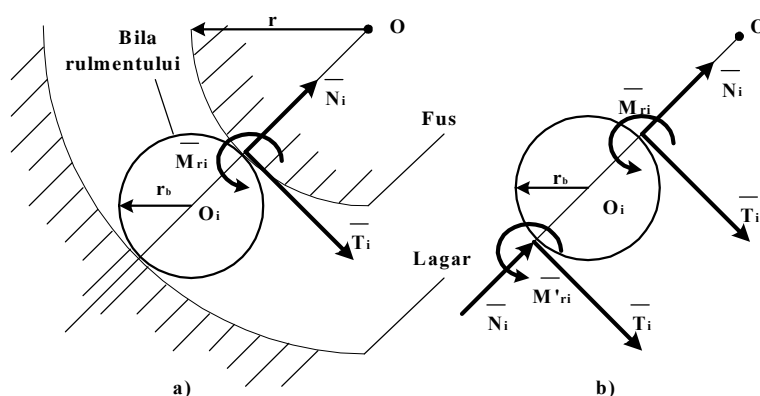


Fig. 6.23

Pentru calculul expresiilor  $\bar{T}_i$  și  $\bar{M}_{ri}$  se consideră una din bilele rulmentului de rază  $r_b$ , ca în Figura 6.23 b). Neglijând greutatea proprie a bilei și scriind ecuația de momente în raport cu centrul său, se obține

$$T_i \cdot 2r_b = M_{ri} - M'_{ri} \quad (6.44)$$

La limită, când fusul și bilele sunt gata să se rostogolească, se pot scrie relațiile

$$\begin{aligned} M_{ri} &= N_i \cdot \mu_{r1} \\ M'_{ri} &= N_i \cdot \mu_{r2} \end{aligned} \quad (6.45)$$

unde  $\mu_{r1}$  și  $\mu_{r2}$  sunt coeficienții de frecare de rostogolire între fus și bilă, respectiv între bilă și inelul rulmentului.

Din relațiile (6.44) și (6.45) se deduce expresia pentru determinarea mărimii forței de frecare,  $\bar{T}_i$

$$T_i = \frac{N_i (\mu_{r1} + \mu_{r2})}{2r_b} \quad (6.46)$$

și a mărimii momentului cuplului de rostogolire  $\overline{M}_{ri}$

$$M_{lr} = \sum_{i=1}^n N_i \left( \frac{\mu_{r1} + \mu_{r2}}{2r_b} r + \mu_{r1} \right) \quad (6.47)$$

sau

$$M_{lr} = r \frac{\sum_{i=1}^n N_i}{R'} \left( \frac{\mu_{r1} + \mu_{r2}}{2r_b} r + \frac{\mu_{r1}}{r} \right) R' = \mu_{lr} \cdot r \cdot R' \quad (6.48)$$

în care,  $R'$  reprezintă reacțiunea din lagăr în ipoteza că nu există

frecare, iar  $\mu_{lr} = \frac{\sum_{i=1}^n N_i}{R'} \left( \frac{\mu_{r1} + \mu_{r2}}{2r_b} r + \frac{\mu_{r1}}{r} \right)$  se numește coeficient de frecare în cazul lagărelor de rostogolire.

**Observația 6.10:**

Expresia coeficientului de frecare în cazul lagărelor de rostogolire depinde de legea de variație a reacțiunilor normale  $\overline{N}_i$ ,  $i=1\dots n$  pe suprafața de contact dintre fus și lagăr și se determină experimental, dar valoarea acestui coeficient este mult mai mică decât în cazul lagărelor de alunecare cu strângere.

**Observația 6.11:**

Analizând relațiile (6.31), (6.40), (6.42) și (6.48) se poate concluziona că frecarea în articulații și lagăre se manifestă printr-un cuplu de frecare având momentul dat de una dintre relațiile menționate anterior, valoarea acestui moment fiind una aproximativă și depinzând de valoarea determinată experimental a coeficientului de frecare și care variază semnificativ cu viteza de rotație a arborelui sau osiei considerate.

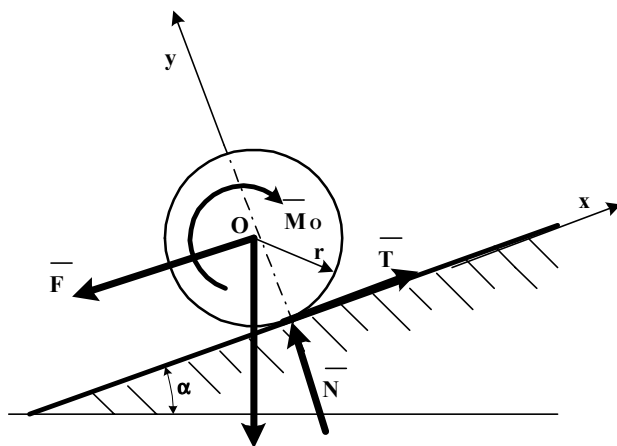
### 6.2.3.3. Frecările în cazul prinderilor cu fire

Problema frecărilor în cazul în care solidele rigide sunt supuse la legături prin legare cu fire, va fi prezentată pe larg în cadrul Capitolului 7.

## APLICAȚII

### 9. Enunț

Pentru roata motoare din figură, având raza  $r$ , se cere să se studieze condițiile de echilibru static, cunoscând unghiul de înclinare,  $\alpha$ , al planului înclinat și valoarea coeficientului de frecare de alunecare,  $\mu$  și coeficientul de alunecare de rostogolire,  $\mu_r$ .



### Rezolvare

Roata motoare considerată, poate avea tendințe de rostogolire în sus și în jos pe planul înclinat și tendințe de alunecare numai în jos, sub acțiunea momentului motor  $\overline{M}_O$  și a forței motoare  $\overline{F}$ .

La limită, ecuațiile scalare de echilibru static, pentru roata motoare eliberată de legături, la care se adaugă și condițiile impuse de existența frecării, se scriu astfel:

$$T - F - G \sin \alpha = 0$$

$$N - G \cos \alpha = 0$$

$$M_O \pm M_r - T \cdot r = 0$$

$$T = \mu N$$

$$M_r = \mu_r N$$

în care, semnul + corespunde tendinței de rostogolire în sus pe planul înclinat, iar semnul – corespunde tendinței de rostogolire în jos.

Se obțin expresiile pentru valorile limită

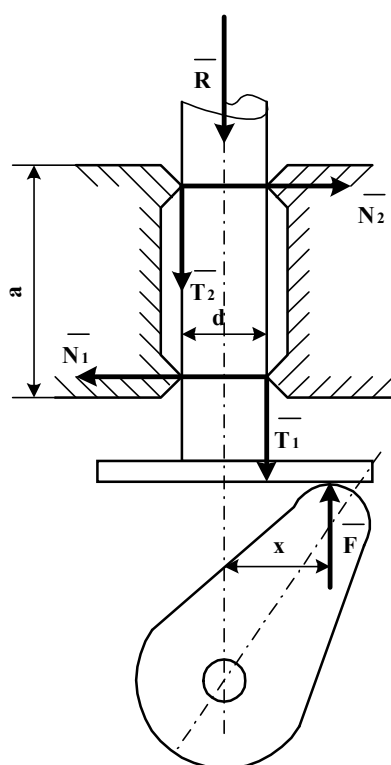
$$F = G(\mu \cos \alpha - \sin \alpha)$$

$$M_O = G \cdot r \left( \mu \pm \frac{\mu_r}{r} \right) \cos \alpha$$

Se deosebesc următoarele situații posibile, în condițiile în

care se notează  $c = \frac{M_O}{G \cdot r \cdot \cos \alpha}$ :

Mișcări posibile	Valoarea c	Forța motoare $\overline{F}$
Alunecarea nu este posibilă		
Echilibru (autofrânare)	$\mu - \frac{\mu_r}{r} < c < \mu + \frac{\mu_r}{r}$	$F \leq G(\mu \cos \alpha - \sin \alpha)$
Rostogolire în sus	$c > \mu + \frac{\mu_r}{r}$	
Rostogolire în jos	$c < \mu - \frac{\mu_r}{r}$	
Se manifestă fenomenul de patinare		
Alunecare în jos	$\mu - \frac{\mu_r}{r} < c < \mu + \frac{\mu_r}{r}$	$F > G(\mu \cos \alpha - \sin \alpha)$
Alunecare în jos și rostogolire în sus	$c > \mu + \frac{\mu_r}{r}$	
Alunecare în jos și rostogolire în jos	$c < \mu - \frac{\mu_r}{r}$	

**10. Enunț**

Să se determine lungimea, notată cu  $a$ , aparținând porțiunii de ghidare a tijei tachtului din figură, pentru evitarea autoblocării, dacă asupra acestuia acționează forța,  $\bar{F}$ , imprimată de cama motoare și reacțiunea,  $\bar{R}$ , a arcului. Se cunoaște valoarea coeficientului de frecare,  $\mu$ , care este aceeași în toate punctele de contact cu ghidajul.

**Rezolvare**

Eliberând legăturile și introducând reacțiunile corespunzătoare, se scriu următoarele ecuații scalare de echilibru static, care trebuie îndeplinite pentru funcționarea corectă a tachtului

$$N_1 - N_2 = 0$$

$$F \geq R + T_1 + T_2$$

$$F \cdot x + (T_2 - T_1) \frac{d}{2} - N_2 \cdot a = 0$$

la care se adaugă condițiile impuse de apariția fenomenului de frecare

$$T_1 = \mu \cdot N_1$$

$$T_2 = \mu \cdot N_2$$

Prin rezolvare se obține

$$R \leq F \left( 1 - 2\mu \frac{x}{a} \right)$$

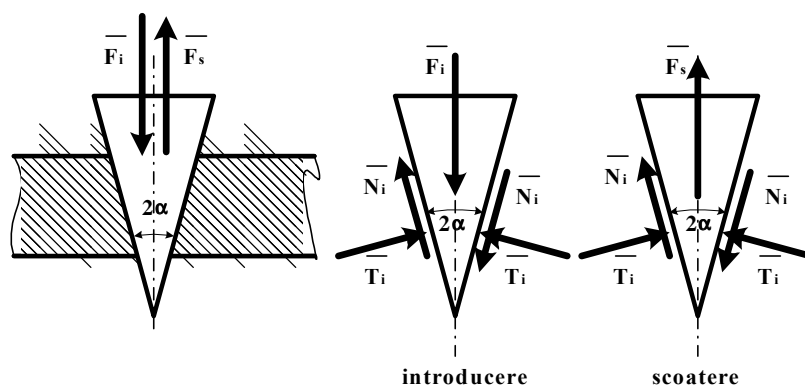
pentru ca relația obținută să fie posibilă, trebuie ca lungimea de ghidare să satisfacă condiția

$$a - 2\mu \frac{x}{a} > 0$$

Se menționează că distanța  $x$  la care acționează forța motoare  $\bar{F}$  este, de obicei, cunoscută, ea fiind determinată de profilul camei de acționare.

### 11. Enunț

În figură se consideră o pană de forma unui triunghi isoscel cu unghiul la vârf  $2\alpha$ . Coeficientul de frecare de alunecare între pană și locașul ei este  $\mu$ . Să se determine condiția de autofixare a penei în locaș și raportul dintre forța necesară introducerii, respectiv scoaterii penei din locaș.



### Rezolvare

Eliberând legăturile și introducând reacțiunile corespunzătoare, se scriu următoarele ecuații scalare de echilibru



static care trebuie îndeplinite pentru introducerea respectiv scoaterea penei în/din locașul său

$$F_i = 2 \sum_{i=1}^n N_i \sin \alpha + 2 \sum_{i=1}^n \mu N_i \cos \alpha = 2(\sin \alpha + \mu \cos \alpha) \sum_{i=1}^n N_i$$

$$F_s = 2 \sum_{i=1}^n \mu N_i \cos \alpha - 2 \sum_{i=1}^n N_i \sin \alpha = 2(\mu \cos \alpha - \sin \alpha) \sum_{i=1}^n N_i$$

Împărțind cele două relații, se obține

$$\frac{F_i}{F_s} = \frac{\sin \alpha + \mu \cos \alpha}{\mu \cos \alpha - \sin \alpha}$$

Pentru ca pana să rămână autofixată după batere, este necesar ca valoarea forței de scoatere să fie pozitivă sau cel puțin nulă, adică

$$\mu \cos \alpha - \sin \alpha \geq 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg} \alpha \leq \mu$$

## CAPITOLUL 7

### STATICA SISTEMELOR MATERIALE

Acest capitol tratează unele aspecte esențiale privind statica sistemelor de puncte materiale și de solide rigide oarecare, în particular de bare articulate. În ultima parte se va trata și statica firelor. Capitolul prezintă și câteva aplicații rezolvate, considerate a fi reprezentative pentru problematica studiată.

#### 7.1. STATICA SISTEMELOR DE PUNCTE MATERIALE

##### **Definiția 7.1:**

Se numește *sistem de puncte materiale*, o mulțime finită de  $n$  puncte materiale aflate în interacțiune mecanică.

Un sistem de  $n$  puncte materiale libere în spațiu, are  $3n$  grade de libertate, deoarece pentru un singur punct aparținând sistemului, este necesară cunoașterea a 3 parametri scalari independenți care îi definesc poziția în spațiu.

Un sistem de  $n$  puncte materiale supus la legături, are anumite restricții geometrice impuse de aceste legături și care sunt exprimate cu ajutorul unui număr,  $m$ , de relații scalare independente între ele. Numărul gradelor de libertate,  $N$ , pentru un sistem spațial de puncte materiale se determină cu relația

$$N = 3n - m \quad (7.1)$$

Legăturile punctelor materiale ale unui sistem pot fi:

- interioare (când se limitează libertatea de mișcare reciprocă a două puncte materiale aparținând sistemului);
- exterioare (când se limitează libertatea de mișcare a unora din punctele materiale aparținând sistemului în raport cu mediul exterior).

Forțele care acționează asupra unui sistem de puncte materiale pot fi:

➤ exterioare,  $\bar{F}_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  sunt forțele cu care acționează mediul material exterior asupra sistemului de puncte materiale (indicele exprimă punctul din sistem asupra căruia se acționează);

➤ interioare,  $\bar{F}_{ij}$ ,  $i, j = 1, \dots, n, i \neq j$  sunt forțele care se exercită între două puncte materiale aparținând sistemului (indicele  $i$  se referă la punctul asupra căruia este aplicată forța, iar indicele  $j$  se referă la punctul care exercită această forță).

**Definiția 7.2:**

Un sistem de  $n$  puncte materiale se numește *în echilibru static*, dacă fiecare punct material al său este în echilibru.

Exprimarea analitică a definiției 7.2, reprezintă condiția necesară și suficientă pentru realizarea echilibrului static a unui sistem de puncte materiale și se scrie:

$$\bar{F}_i + \sum_{j=1}^n \bar{F}_{ij} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n; i \neq j \quad (7.2)$$

Relațiile (7.2) reprezintă *sistemul fundamental al ecuațiilor de echilibru static pentru un sistem de  $n$  puncte materiale* și se poate scrie desfășurat în forma următoare

$$\begin{aligned} \bar{F}_1 + \bar{F}_{12} + \dots + \bar{F}_{1j} + \dots + \bar{F}_{1n} &= 0 \\ \bar{F}_2 + \bar{F}_{21} + \dots + \bar{F}_{2j} + \dots + \bar{F}_{2n} &= 0 \\ \vdots & \\ \bar{F}_i + \bar{F}_{i1} + \bar{F}_{i2} + \dots + \bar{F}_{ij} + \dots + \bar{F}_{in} &= 0 \\ \vdots & \\ \bar{F}_n + \bar{F}_{n1} + \bar{F}_{n2} + \dots + \bar{F}_{nj} + \dots + \bar{F}_{n,n-1} &= 0 \end{aligned} \quad (7.3)$$

Adunând membru cu membru ecuațiile sistemului (7.3), se obține

$$\sum_{i=1}^n \bar{F}_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \bar{F}_{ij} = 0, \quad i \neq j \quad (7.4)$$

Deoarece forțele interioare  $\bar{F}_{ij}$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ ,  $i \neq j$  sunt, două câte două egale în modul și opuse ca sens, suma dublă din relația (7.4) este nulă.

Se obține astfel, prima condiție necesară pentru ca un sistem de puncte materiale să fie în echilibru: *suma vectorială a forțelor exterioare să fie nulă*, ceea ce se traduce prin

$$\sum_{i=1}^n \bar{F}_i = 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (7.5)$$

Întrucât relațiile (7.3) vectorial la stânga cu  $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \dots$ , respectiv  $\bar{r}_n$  și adunându-le apoi membru cu membru, se obține

$$\sum_{i=1}^n \bar{r}_i \times \bar{F}_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \bar{r}_i \times \bar{F}_{ij} = 0, \quad i \neq j \quad (7.6)$$

Suma dublă din relația (7.6) este, de asemenea, nulă.

Se obține astfel, a doua condiție necesară pentru ca un sistem de puncte materiale să fie în echilibru: *suma vectorială a momentelor forțelor exterioare să fie nulă*, ceea ce se traduce prin

$$\sum_{i=1}^n \bar{r}_i \times \bar{F}_i = 0, \quad i \neq j \quad (7.7)$$

Relațiile (7.5) și (7.6) conduc la următoarea concluzie:

*Pentru ca un sistem de puncte materiale să fie în echilibru static, este necesar ca torsiul forțelor exterioare care îl acționează să fie nul, în raport cu un punct arbitrar ales.*

Pe această bază au fost enunțate următoarele teoreme:

**Teoremă (teorema solidificării):**

Dacă un sistem de puncte materiale deformabil este în echilibru static, atunci el rămâne în echilibru și dacă este considerat rigid.

**Teoremă (teorema echilibrului părților):**

Dacă dintr-un sistem de puncte materiale, aflat în echilibru static, se izolează o parte (denumită subsistem), ea este în echilibru sub acțiunea forțelor care o acționează.

**7.2. STATICA SISTEMELOR DE SOLIDE RIGIDE**

**Definiția 7.3:**

Se numește *sistem de solide rigide*, o mulțime finită de  $n$  corpuri materiale rigide aflate în interacțiune mecanică.

Ca și în cazul solidului rigid, pentru a defini complet poziția unui sistem de solide rigide, trebuie cunoscut numărul gradelor de libertate.

Un sistem de  $n$  solide rigide libere în spațiu, are  $6n$  grade de libertate, deoarece pentru un singur rigid aparținând sistemului, este necesară cunoașterea a 6 parametri scalari independenți care îi definesc poziția în spațiu.

Un sistem de  $n$  solide rigide supus la legături, are anumite restricții geometrice impuse de aceste legături și care sunt exprimate cu ajutorul unui număr,  $m$ , de relații scalare independente între ele. Numărul gradelor de libertate,  $N$ , pentru un sistem spațial de solide rigide se determină cu relația

$$N = 6n - m \quad (7.8)$$

Legăturile unui sistem de solide rigide sunt de tipul celor studiate la statica solidului rigid supus la legături (v. Capitolul 6 paragraful 6.2.) și pot fi:

➤ interioare (când se limitează libertatea de mișcare reciprocă a două corpuri materiale aparținând sistemului);

➤ exterioare (când se limitează libertatea de mișcare a unora din corpurile materiale aparținând sistemului în raport cu mediul exterior).

Forțele care acționează asupra unui sistem de  $n$  solide rigide pot fi:

➤ exterioare,  $\bar{F}_i$ ,  $i=1,\dots,n$  sunt forțele cu care acționează mediul material exterior asupra sistemului de solide rigide (indicele  $i$  exprimă rigidul din sistem asupra căruia se acționează);

➤ interioare,  $\bar{F}_{ij}$ ,  $i,j=1,\dots,n, i \neq j$  sunt forțele care se exercită între două solide rigide aparținând sistemului (indicele  $i$  se referă la rigidul asupra căruia este aplicată forța, iar indicele  $j$  se referă la rigidul care exercită această forță).

#### **Definiția 7.4:**

Un sistem de  $n$  solide rigide se numește *în echilibru static*, dacă fiecare corp material al său este în echilibru și reciproc,  $n$  corpuri materiale aflate în echilibru, alcătuiesc un sistem de solide rigide aflat în echilibru static.

Problemele privind statica sistemelor de solide, sunt aceleași ca și în cazul staticii solidelor rigide și al sistemelor de puncte materiale. Pentru rezolvarea acestora, se recomandă mai multe metode, care au la bază teoremele prezentate în studiul staticii sistemelor de puncte materiale.

#### **Metoda izolării corpurilor**

Dacă un sistem de solide rigide libere sau supuse la legături este în echilibru static, atunci fiecare solid rigid al sistemului material este în echilibru static.

Aplicarea acestei metode presupune parcurgerea următorului algoritm:

a) se izolează fiecare rigid al sistemului considerat, aplicându-i toate forțele exterioare și interioare, și se introduc elementele mecanice (forțe și momente) corespunzătoare legăturilor care-l acționează (este important de reținut că la

introducerea forțelor interioare și a elementelor mecanice de legătură trebuie să se aibă în vedere respectarea principiului acțiunii și reacțiunii);

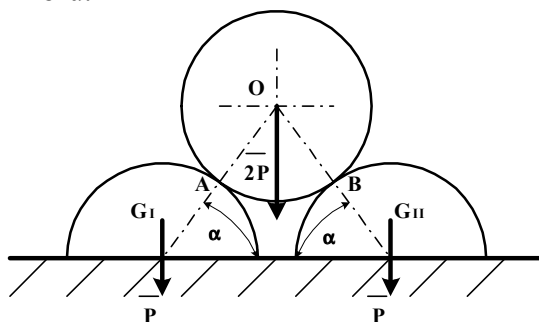
b) se scriu și se rezolvă ecuațiile de echilibru static.

Metoda izolării corpurilor este cea mai generală metodă de studiu a echilibrului sistemelor de solide rigide și se dovedește eficientă atunci când este necesară cunoașterea reacțiunilor introduse de legăturile la care este supus sistemul și a tuturor parametrilor care determină poziția sa de echilibru

## APLICAȚII

### 1. Enunț

În figură se consideră o sferă având greutatea  $2P$  care este rezemată fără frecare, în punctele A și B, pe două semisfere având, fiecare, greutatea  $P$ . Cunoșcând valoarea unghiului  $\alpha$ , se cere să se determine valoarea coeficientului de frecare,  $\mu$ , dintre semisfere și suprafața orizontală, pentru ca sistemul considerat să fie în echilibru.



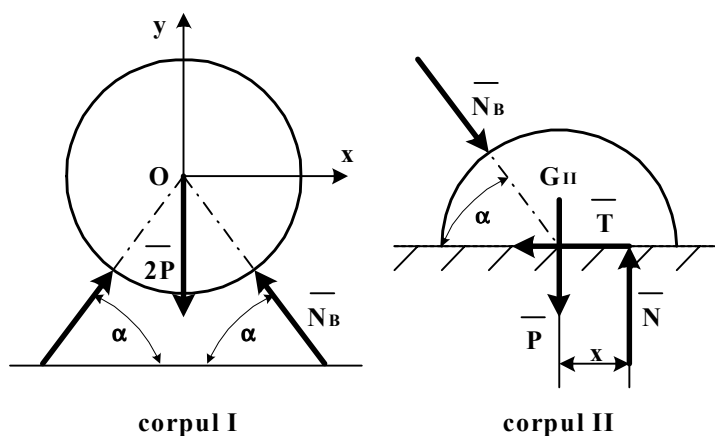
### Rezolvare

Se aplică metoda izolării corpurilor. Așa cum se arată și în figură, s-au izolat corpurile, s-au eliberat de legături și s-au figurat toate forțele care acționează fiecare corp în parte.

Pentru corpul I se scriu următoarele ecuații scalare de echilibru

$$N_A \cos \alpha - N_B \cos \alpha = 0$$

$$N_A \sin \alpha + N_B \sin \alpha - 2P = 0$$



Prin rezolvare se obține

$$N_A = N_B = \frac{P}{\sin \alpha}$$

Pentru corpul II se scriu următoarele ecuații scalare de echilibru

$$N_B \cos \alpha - T = 0$$

$$-N_B \sin \alpha - P + N = 0$$

$$N \cdot x = 0$$

La aceste ecuații se adaugă condiția impusă de existența frecării

$$T \leq \mu N$$

Prin rezolvare se obține

$$N = 2P$$

$$x = 0 \quad \text{și, deci, } \mu \geq \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \alpha$$

$$T = P \operatorname{ctg} \alpha$$

### Metoda solidificării

Dacă un sistem de solide rigide libere sau supuse la legături este în echilibru static, atunci el poate fi considerat ca un solid rigid unic obținut prin solidificarea sistemului considerat inițial.



Aplicarea acestei metode presupune parcurgerea următorului algoritm:

a) se consideră sistemul de solide rigide, ca un singur corp material căruia i se aplică toate forțele exterioare și se introduc elementele mecanice (forțe și momente) corespunzătoare legăturilor cu mediul material exterior;

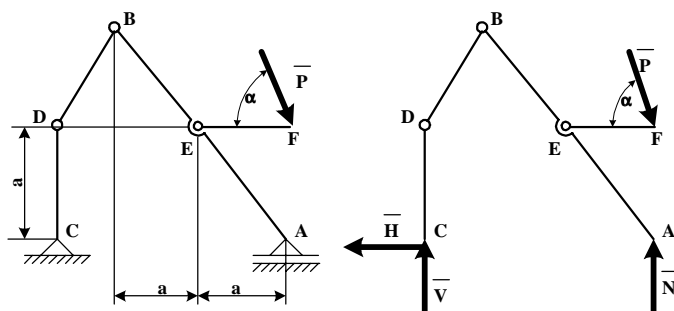
b) se scriu și se rezolvă ecuațiile de echilibru static.

Metoda solidificării corpurilor se aplică, în general, atunci când este necesară cunoașterea doar a reacțiunilor introduse de legăturile la care este supus sistemul de solide rigide cu mediul material exterior.

## APLICAȚII

### 2. Enunț

În figura de mai jos, se consideră un sistem de solide rigide alcătuit din bare,  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$ ,  $\overline{EF}$  fixate prin articulațiile din punctele B, C, D, E și prin reazemul simplu din punctul A.



Se cere să se determine reacțiunile din legăturile exterioare, cunoscând forța  $\overline{P}$ , valoarea unghiului  $\alpha$  și distanța  $a$ .

### Rezolvare

Se aplică metoda solidificării corpurilor.

Așa cum se arată și în figură, barele s-au solidificat și corpul astfel obținut s-a eliberat de legăturile exterioare (articulația din punctul C și reazemul simplu din punctul A) și s-au figurat forțele exterioare care acționează acest corp.

Se scriu următoarele ecuații scalare de echilibru

$$-H + P \cos \alpha = 0$$

$$V - P \sin \alpha + N = 0$$

$$N \cdot 2a - P \cdot 2a \sin \alpha - P \cdot a \cos \alpha = 0$$

Prin rezolvare se obține

$$N = P \frac{2 \sin \alpha + \cos \alpha}{2}$$

$$H = P \cos \alpha$$

$$V = -\frac{P}{2} \cos \alpha$$

### Metoda echilibrului părților

Dacă un sistem de solide rigide libere sau supuse la legături este în echilibru static, atunci o parte oarecare din sistem, poate fi considerat ca un solid rigid aflat, de asemenea, în echilibru static.

Aplicarea acestei metode presupune parcurgerea următorului algoritm:

a) se izolează subsistemul care urmează a fi studiat, căruia i se aplică toate forțele exterioare și interioare și se introduc elementele mecanice (forțe și momente) corespunzătoare legăturilor care-l acționează;

b) se scriu și se rezolvă ecuațiile de echilibru static.

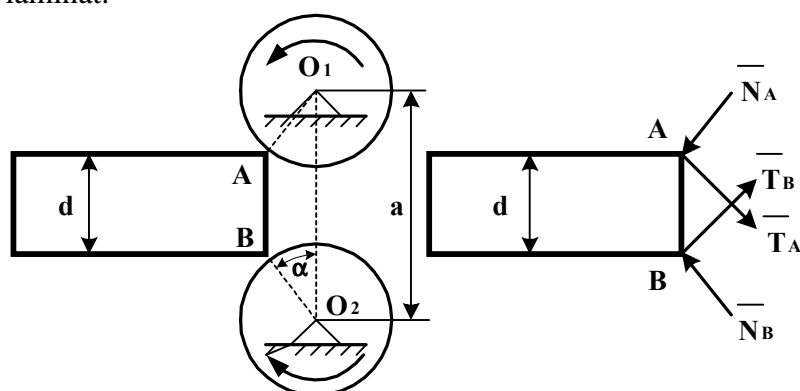
Metoda solidificării corpurilor se aplică, în general, atunci când este necesară cunoașterea doar a reacțiunilor introduse de legăturile la care este supus sistemul de solide rigide cu mediul material exterior.

## APLICAȚII

### 2. Enunț

Laminorul din figură, este format din doi cilindri verticali de rază  $r$ , care se rotesc în sens opus. Distanța dintre cilindri este

a, iar coeficientul de frecare dintre corpul laminat și cilindri este  $\mu = 0,1$ . Să se determine grosimea maximă,  $d$ , a corpului de laminat.



### Rezolvare

Se aplică metoda echilibrului părților.

Așa cum se vede și în figură, s-a izolat corpul de laminat, cel care prezintă interes pentru rezolvarea problemei, și s-a eliberat de legăturile cu cei doi cilindri în punctele A și B și s-au figurat reacțiunile care acționează acest corp.

Se scrie următoarea ecuație scalară de echilibru care face posibilă laminarea

$$(N_A + N_B) \sin \alpha \leq \mu (N_A + N_B) \cos \alpha$$

de unde,

$$\tan \alpha \leq \mu$$

Laminarea este posibilă numai dacă unghiul de prindere,  $\alpha$ , este mai mic decât unghiul de frecare.

Grosimea maximă de laminare se obține din relația geometrică ce poate fi scrisă în trapezul  $ABO_2O_1$ .

$$d + 2r \cos \alpha = a + 2r$$

de unde

$$d = a + 2r(1 - \cos \alpha)$$

Din condiția de laminare se obține

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \mu^2}}$$

și deci,

$$d \leq a + 2r \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \mu^2}} \right)$$

### 7.3. STATICA SISTEMELOR MATERIALE ARTICULATE - GRINZI CU ZĂBRELE

#### Definiția 7.5:

Un sistem tehnic spațial sau plan alcătuit din bare rectilinii rigide, articulate între ele în puncte numite noduri, se numește *grindă cu zăbrele*.

În tehnică, aceste sisteme tehnice nedeformabile de bare legate între ele prin articulații și capabile să suporte solicitările pentru care au fost proiectate, se întâlnesc la podurile de cale ferată, la podurile rulante industriale, la stâlpii de susținere ai cablurilor electrice, la construcțiile metalice ale macaralelor, la structurile de acoperiș etc.

#### Observația 7.2:

În continuare, vor fi prezentate și analizate numai sistemele materiale articulate plane – grinzi cu zăbrele plane.

#### 7.3.1. Definiții. Ipoteze simplificatoare

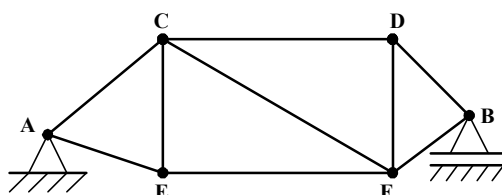


Fig. 7.1.

În Figura 7.1, s-a considerat o grindă plană cu zăbrele, pentru care se disting următoarele elemente constructive:

- *nodurile* – care sunt reprezentate de punctele de articulare a barelor (A, B, C, D, E, F);
- *tălpile* – care sunt reprezentate de barele exterioare ale grinzii (ACDB și AEFB);
- *zăbrelele* – care reprezintă barele care leagă tălpile între ele. Dacă zăbrelele sunt verticale, ele se numesc *montanți* (CE, DF) iar dacă zăbrelele sunt înclinate, ele se numesc *diagonale* (CF);
- *legăturile exterioare* ale grinzii cu zăbrele – care pot fi reprezentate de articulații (A) și reazeme simple (B).

Problema care trebuie rezolvată în cazul grinzilor cu zăbrele se referă la determinarea mărimii și orientării eforturilor care solicită barele sistemului tehnic considerat.

Sunt valabile următoarele ipoteze simplificatoare:

- barele care alcătuiesc grinda cu zăbrele sunt modelate ca linii materiale, ele fiind considerate rectilinii și având secțiunile transversale de dimensiuni neglijabile în raport cu lungimea lor;
- nodurile care alcătuiesc grinda cu zăbrele sunt modelate ca puncte materiale, articulațiile care fac legătura între bare fiind considerate plane, de dimensiuni mici și fără frecare;
- eforturile exterioare care acționează asupra unei grinzi cu zăbrele sunt aplicate numai în noduri și sunt coplanare cu grinda;
- greutatea proprie a barelor care alcătuiesc grinda cu zăbrele, care nu este aplicată în nodurile unei bare, se descompune în două componente paralele care acționează în cele două noduri;
- eforturile interioare care acționează în barele unei grinzi cu zăbrele, sunt aplicate numai în noduri și acționează pe direcția longitudinală a axei geometrice a barei, fiind forțe de întindere sau de compresiune (se presupune inițial că eforturile sunt de întindere. Dacă din calcule rezultă valori pozitive,

înseamnă că într-adevăr eforturile sunt de întindere; dacă rezultă valori negative, atunci eforturile sunt de compresiune; dacă rezultă valoarea zero, atunci bara nu este solicitată);

➤ sistemul tehnic reprezentat de o grindă cu zăbrele se consideră plan și nedeformabil la acțiunea eforturilor exterioare.

Realizarea tehnică a sistemelor materiale plane articulate, este, în realitate, mult mai complicată.

Astfel, la grinzile cu zăbrele, articulațiile sferice sau cilindrice cunoscute, sunt înlocuite cu plăci metalice numite gusee, prin intermediul cărora barele care alcătuiesc grinda se fixează prin nituire sau sudare – în cazul grinzilor metalice – sau cu elemente de continuitate – cazul grinzilor de beton – sau cu articulații metalice – cazul organelor de mașini. Deoarece acest mod de fixare împiedică rotirea relativă a barelor între ele, nu se poate vorbi despre o articulație propriu-zisă, așa cum a fost ea studiată la paragraful 6.2.2.2. Datorită posibilităților tehnice de realizare a legăturilor, nu se poate spune că în punctele de articulare nu apar frecări. De asemenea, sunt situații când dimensiunile și greutatea proprii ale barelor care alcătuiesc grinda cu zăbrele nu se pot neglija. În general, forțele care acționează o grindă cu zăbrele sunt aplicate și pe bare, nu numai în noduri (presiunea vântului, de exemplu). În realitate, sub acțiunea multiplelor solicitări statice și dinamice la care este supusă, o grindă cu zăbrele reprezintă un sistem tehnic deformabil.

Rezistența materialelor, alături de teoriile elasticității și plasticității, oferă suportul teoretic și mijloacele matematice de rezolvare a problemelor ridicate de studiul grinzilor cu zăbrele, în condiții cât mai apropiate de realitatea tehnică.

În continuare, se va ține seama însă de ipotezele simplificatoare prezentate anterior, având în vedere faptul că studiile din aceste discipline au dovedit că la o grindă cu zăbrele bine conformată (cu unghiuri între bare adiacente mai mari de  $30^0$ ) aceste ipoteze sunt foarte apropiate de realitate.

Se poate conchide astfel, că pentru a putea îndeplini funcțiile constructive pentru care a fost proiectată, o grindă cu zăbrele, sub acțiunea unui sistem de forțe exterioare, trebuie să satisfacă condițiile de rigiditate geometrică și să aibă o poziție invariabilă față de punctele de legătură care o fixează în raport cu mediul material exterior.

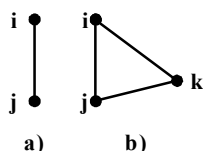
Pentru ca rigiditatea geometrică și fixarea în plan a unei grinzi cu zăbrele să fie asigurate, este necesar să fie respectată o relație bine determinată între numărul barelor,  $b$  și numărul nodurilor,  $n$  din care aceasta este alcătuită.

În baza ipotezelor simplificatoare acceptate, un nod izolat al unei grinzi cu zăbrele reprezintă un punct material care, sub acțiunea unui sistem concurent de forțe plane, trebuie să fie în echilibru static. Această condiție este exprimată de două ecuații scalare, deci de  $2n$  ecuații scalare de echilibru pentru toată grinda. În aceste ecuații apar ca necunoscute forțele care acționează în cele  $b$  bare ale sistemului și reacțiunile,  $r$ , introduse de legăturile cu mediul material exterior.

O condiție necesară pentru ca grinda cu zăbrele să fie static determinată este ca numărul ecuațiilor scalare de echilibru static care se pot scrie să fie egal cu numărul necunoscutelor introduse în sistem. Prin urmare, o condiție necesară este relația

$$2n = b + r \quad (7.9)$$

Este necesar, așa cum s-a precizat anterior, ca poziția fiecărui nod, în raport cu celelalte să fie invariabilă, iar sistemul tehnic, în ansamblul său, să aibă numărul necesar și suficient de legături care să-i asigure fixarea în plan.



**Fig. 7.2.**

Poziția relativă a unui nod,  $i$ , față de un nod,  $j$ , este invariabilă, când cele două noduri sunt legate printr-o bară de lungime constantă, așa cum se arată în Figura 7.2.

Un al treilea nod,  $k$ , necesită două bare,  $i-k$  și  $j-k$ , pentru a legat de primele două noduri considerate.

Se obține astfel, cea mai simplă figură geometrică invariabilă, triunghiul. Orice alt nod poate fi legat de restul structurii prin intermediul a două bare.

Se poate conchide că, pentru fiecare nod al unei grinzi cu zăbrele sunt necesare două bare, cu excepția primelor două noduri pentru legarea cărora este suficientă o singură bară. Prin urmare, pentru a realiza o poziție geometrică invariabilă, este necesar ca grinda cu zăbrele să aibă un număr de bare,

$$b = 2(n - 2) + 1 = 2n - 3 \quad (7.10)$$

În plus, trebuie prevăzut și numărul minim de legături pentru a fixa grinda în raport cu mediul material exterior. O grindă plană este un sistem rigid cu trei grade de libertate, deci, pentru fixarea ei, legăturile exterioare introduc trei necunoscute,

$$r = 3 \quad (7.11)$$

Însumând relațiile (7.10) și (7.11), se obține

$$b + r = 2n \quad (7.12)$$

relație care exprimă condițiile necesare pentru determinarea numărului minim de legături care asigură stabilitatea geometrică și poziția invariabilă care fixează grinda cu zăbrele în raport cu mediul material exterior.

Relația (7.12) stabilește condiții cantitative între numărul nodurilor, barelor și al reacțiunilor introduse de legăturile cu mediul material exterior, dar nu dau nici o indicație în ceea ce privește modul de distribuire al acestor elemente. De aceea, relația (7.12) este necesară, dar nu și suficientă, pentru studiul echilibrului static al unei grinzi cu zăbrele.

### **7.3.2. Metode analitice și grafice de studiu a echilibrului static al grinzilor cu zăbrele**

Se cunosc următoarele modalități de studiu a echilibrului static al grinzilor cu zăbrele:



- metoda izolării nodurilor;
- metoda secțiunilor (metoda Ritter);
- metoda grafică:
  - metoda Cremona;
  - metoda Culmann

### **Metoda izolării nodurilor**

Metoda izolării nodurilor este o metodă analitică de determinare a forțelor care solicită barele unei grinzi cu zăbrele și se bazează pe teorema echilibrului părților. În baza acestei teoreme, pentru o grindă cu zăbrele aflată în echilibru static, orice parte a sa este în echilibru, deci și orice nod al său este în echilibru static.

Metoda constă în izolarea tuturor nodurilor grinzii cu zăbrele, fiecare nod fiind considerat un punct material acționat de un sistem de forțe coplanare concurente în nodul considerat. Pentru fiecare nod izolat se pot scrie două ecuații scalare de echilibru, deci, pentru o grindă cu zăbrele având  $n$  noduri, se pot scrie  $2n$  ecuații scalare de echilibru. Evident, în urma izolării nodurilor, barele grinzii introduc ca necunoscute forțele care le acționează, la care se adaugă, tot ca necunoscute, reacțiunile introduse de legăturile eliberate.

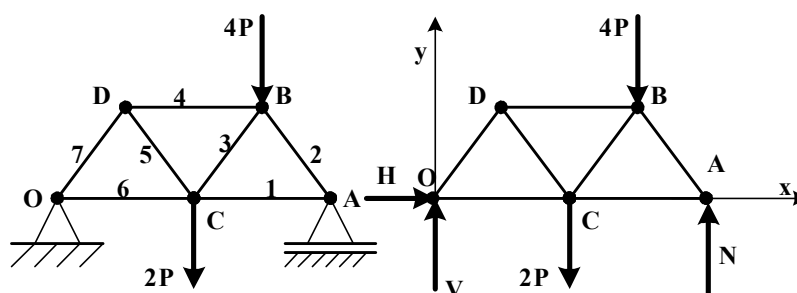
Pentru aplicarea metodei izolării nodurilor, se izolează, pe rând, fiecare nod, urmărind ca, la fiecare izolare, să nu existe mai mult de două necunoscute. Pentru aceasta, este util să se determine, mai întâi, reacțiunile din legăturile exterioare, prin metoda solidificării, prezentată la paragraful 7.2. Pentru cazurile mai complexe, la care numărul de noduri izolate este mare și apar noduri în care există mai mult de două necunoscute, metoda rezolvării succesive a ecuațiilor scalare de echilibru static este extrem de anevoioasă, fiind necesară utilizarea unor metode numerice speciale pentru rezolvarea sistemelor de ecuații liniare, metode care permit programarea asistată de calculator în vederea scurtării timpilor de rezolvare.

Metoda este utilizată în calculele de proiectare, unde trebuie cunoscute toate forțele care solicită sistemul, în vederea unei dimensionări corecte.

## APLICAȚII

### 1. Enunț

Să se determine forțele din barele grinzii cu zăbrele din figura de mai jos, formată din șapte bare de lungime  $l$ , articulată în punctul O și simplu rezemată în punctul A. Grinda este acționată de o forță având mărimea  $4P$ , aplicată în punctul B și de o forță având mărimea  $2P$ , aplicată în punctul C.



### Rezolvare

Deoarece toate nodurile au mai mult de două necunoscute, se determină, mai întâi, reacțiunile din legăturile exterioare, scriind ecuațiile scalare de echilibru pentru grinda solidificată

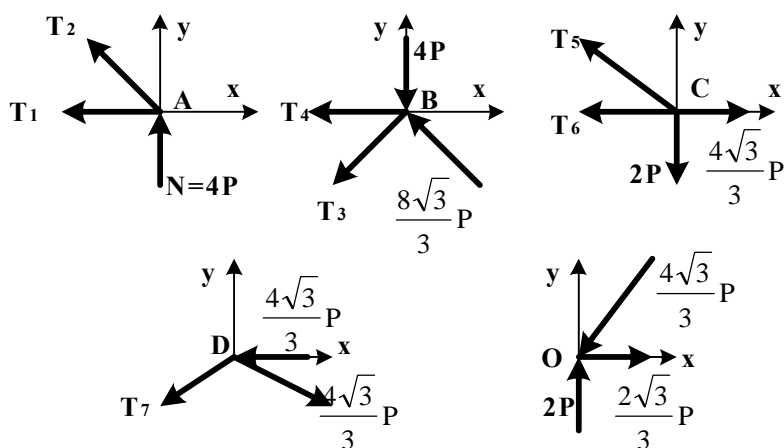
$$\sum_{peOx} (\bar{R} + \bar{R}') = 0 \Leftrightarrow H = 0$$

$$\sum M_A (\bar{R}; \bar{R}') = 0 \Leftrightarrow V \cdot 2l - 2P \cdot l - 4P \cdot \frac{l}{2} = 0$$

$$\sum M_O (\bar{R}; \bar{R}') = 0 \Leftrightarrow N \cdot 2l - 4P \cdot \frac{3l}{2} - 2P \cdot l = 0$$

de unde, se obține

$$H = 0; \quad V = 2P; \quad N = 4P$$



Se izolează fiecare nod, așa cum se vede și în figură, se evidențiază toate forțele care acționează asupra nodurilor și se scriu ecuațiile scalare de echilibru, după cum urmează:

Nodul A

$$\sum_{peOx} (\bar{R} + \bar{R}') = 0 \Leftrightarrow -T_1 - T_2 \cos \frac{\pi}{3} = 0$$

$$\sum_{peOy} (\bar{R} + \bar{R}') = 0 \Leftrightarrow 4P + T_2 \sin \frac{\pi}{3} = 0$$

de unde, se obține

$$T_1 = \frac{4\sqrt{3}}{3}P; \quad T_2 = -\frac{8\sqrt{3}}{3}P$$

Nodul B

$$\sum_{peOx} (\bar{R} + \bar{R}') = 0 \Leftrightarrow -T_4 - T_3 \cos \frac{\pi}{3} - \frac{8\sqrt{3}}{3}P \cos \frac{\pi}{3} = 0$$

$$\sum_{peOy} (\bar{R} + \bar{R}') = 0 \Leftrightarrow -T_3 \cos \frac{\pi}{3} + \frac{8\sqrt{3}}{3}P \sin \frac{\pi}{3} - 4P = 0$$

de unde, se obține

$$T_3 = 0; \quad T_4 = -\frac{4\sqrt{3}}{3}P$$

Nodul C

$$\sum_{peOx} (\bar{R} + \bar{R}') = 0 \Leftrightarrow -T_6 - T_5 \cos \frac{\pi}{3} + \frac{4\sqrt{3}}{3} P = 0$$

$$\sum_{peOy} (\bar{R} + \bar{R}') = 0 \Leftrightarrow T_5 \cos \frac{\pi}{3} - 2P = 0$$

de unde, se obține

$$T_5 = \frac{4\sqrt{3}}{3} P; \quad T_6 = \frac{2\sqrt{3}}{3} P$$

Nodul D

$$\sum_{peOx} (\bar{R} + \bar{R}') = 0 \Leftrightarrow -T_7 \cos \frac{\pi}{3} + \frac{4\sqrt{3}}{3} P \cos \frac{\pi}{3} - \frac{4\sqrt{3}}{3} P = 0$$

$$\sum_{peOy} (\bar{R} + \bar{R}') = 0 \Leftrightarrow -T_7 \cos \frac{\pi}{3} - \frac{4\sqrt{3}}{3} P \sin \frac{\pi}{3} = 0$$

de unde, se obține

$$T_7 = -\frac{4\sqrt{3}}{3} P$$

Nodul O

$$\sum_{peOx} (\bar{R} + \bar{R}') = 0 \Leftrightarrow -\frac{4\sqrt{3}}{3} P \cos \frac{\pi}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{3} P = 0$$

$$\sum_{peOy} (\bar{R} + \bar{R}') = 0 \Leftrightarrow -\frac{4\sqrt{3}}{3} P \cos \frac{\pi}{3} + 2P = 0$$

O ecuație de la nodul D și ecuațiile nodului O servesc pentru verificarea corectitudinii rezolvării problemei.

### Metoda secțiunilor (metoda Ritter)

Metoda secțiunilor sau metoda lui Ritter este o metodă analitică de determinare a forțelor care solicită barele unei grinzi cu zăbrele și se bazează pe teorema echilibrului părților. În baza acestei teoreme, pentru o grindă cu zăbrele în echilibru static, orice parte a sa este în echilibru.

Metoda constă în secționarea completă a grinzii cu zăbrele, deci sistemul se împarte în două părți distincte considerate în echilibru. Forțele care acționează o parte a grinzii cu zăbrele formează un sistem de forțe plane, iar condiția de echilibru se exprimă prin trei ecuații scalare, deci se pot determina numai trei necunoscute. Secționarea se face deci, prin cel mult trei bare între care trebuie să se afle și bara care urmează a fi analizată.

Este util să se determine, mai întâi, reacțiunile din legăturile exterioare, prin metoda solidificării, prezentată la paragraful 7.2.

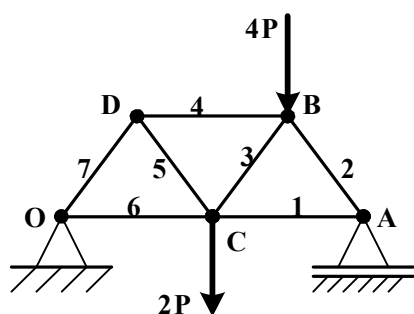
Avantajul esențial al metodei constă în faptul că, pentru fiecare necunoscută, este posibilă scrierea unei ecuații scalare care să conțină numai acea necunoscută. Aceasta este posibil dacă se folosesc ecuații de momente în raport cu puncte convenabil alese, care să elimine două dintre cele trei necunoscute.

Metoda este specifică mai ales pentru realizarea calculelor de verificare a dimensionărilor grinzilor cu zăbrele.

## APLICAȚII

### 2. Enunț

Să se determine forțele din barele 4 și 5 ale grinzii cu zăbrele din figura de mai jos, formată din șapte bare de lungime



$l$ , articulată în punctul O și simplu rezemată în punctul A. Grinda este acționată de o forță având mărimea  $4P$ , aplicată în punctul B și de o forță având mărimea  $2P$ , aplicată în punctul C.

### Rezolvare

Se aplică metoda secțiunilor.

Deoarece toate nodurile au mai mult de două necunoscute, se determină, mai întâi, reacțiunile din legăturile exterioare, scriind ecuațiile scalare de echilibru pentru grinda solidificată

$$\sum_{peOx} (\bar{R} + \bar{R}') = 0 \Leftrightarrow H = 0$$

$$\sum M_A (\bar{R}; \bar{R}') = 0 \Leftrightarrow V \cdot 2l - 2P \cdot l - 4P \cdot \frac{l}{2} = 0$$

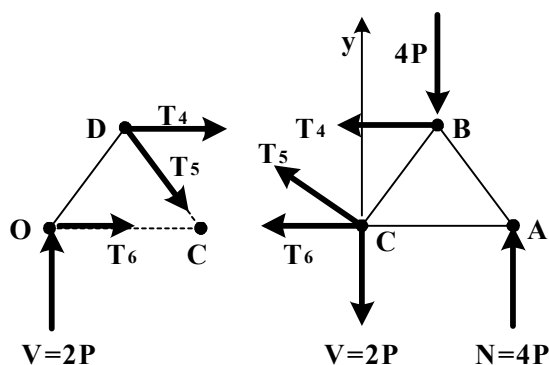
$$\sum M_O (\bar{R}; \bar{R}') = 0 \Leftrightarrow N \cdot 2l - 4P \cdot \frac{3l}{2} - 2P \cdot l = 0$$

de unde, se obține

$$H = 0; \quad V = 2P; \quad N = 4P$$

Se secționează grinda prin barele 4, 5 și 6, incluzând barele 4 și 5 care interesează.

Se pot scrie ecuații scalare de echilibru, pentru oricare dintre părțile secționate, pentru care s-au introdus și toate necunoscutele care apar în urma secționării, preferându-se soluția care conduce cel mai rapid la rezolvarea problemei.



Pentru aceasta, în vederea determinării necunoscutei  $T_4$ , se scrie o ecuație de momente în raport cu punctul C, (în partea dreaptă a grinzii) și anume,

$$4P \cdot l - 4P \cdot \frac{l}{2} + T_4 \cdot \frac{l\sqrt{3}}{2} = 0$$

de unde, se obține

$$T_4 = -\frac{4\sqrt{3}}{3}P$$

Pentru determinarea necunoscutei  $T_5$ , se scrie o ecuație de proiecție pe direcția axei verticale,  $Oy$ .

$$T_5 \frac{\sqrt{3}}{2} - 2P = 0$$

de unde, se obține

$$T_5 = \frac{4\sqrt{3}}{3}P$$

### **Metoda Cremona**

Metoda Cremona poate fi utilizată pentru orice grindă plană cu zăbrele, ea reprezentând aplicarea grafică a metodei analitice a izolării nodurilor.

Metoda presupune construirea succesivă a poligoanelor închise de forțele rezultate din ecuațiile scalare de echilibru scrise pentru fiecare nod.

### **Metoda Culmann**

Metoda Culmann poate fi utilizată pentru orice grindă plană cu zăbrele, ea reprezentând aplicarea grafică a metodei analitice a secțiunilor.

Metoda reprezintă exprimarea grafică a condițiilor de echilibru pentru o parte secționată a unei grinzi cu zăbrele și permite determinarea a trei forțe necunoscute care acționează în barele grinzii.

### **Observația 7.3:**

Metodele grafice de rezolvare a problemelor de echilibru static al grinzilor cu zăbrele, sunt specifice mai ales activităților de proiectare și prezentarea lor detaliată nu face obiectul acestei lucrări.

## 7.4. STATICA FIRELOR

Unul dintre modelele teoretice utilizate în mecanică, este *linia materială*, model care se aplică acelor domenii materiale la care două dintre dimensiuni, lăţimea şi grosimea, sunt relativ mici în raport cu lungimea şi nu joacă practic nici un rol în desfăşurarea mişcării. Acest model are ca elemente caracteristice o linie geometrică care poate fi dreaptă sau curbă, ca reprezentant al axei domeniului material şi o masă, distribuită pe unitatea de lungime, ca mărime ce caracterizează inerţia domeniului considerat. Liniile materiale pot fi *bare* dacă opun rezistenţă la încovoiere sau *fîre* dacă nu opun rezistenţă la încovoiere.

### Definiţia 7.6:

Se numeşte *fîr*, o linie materială perfect flexibilă (nu opune rezistenţă la modificarea formei) şi inextensibilă (nu-şi modifică lungimea sub acţiunea forţelor exterioare aplicate).

Exemple de fire: cabluri diverse, curele, conductoare electrice etc.

### 7.4.1. Ecuaţia generală a firelor

Problema echilibrului static al firelor constă în determinarea formei de echilibru, numită *curbă funiculară* şi a forţei interioare din orice secţiune a unui fîr supus acţiunii unui sistem de forţe exterioare. Soluţia acestei probleme este dată de rezolvarea ecuaţiei generale a firelor.

În Figura 7.3, se consideră un fîr, prins la capetele A şi B, care este supus acţiunii unei forţe,  $\bar{p}$ , distribuită după o lege oarecare pe lungimea firului. Se izolează un element de fîr MM', definit de punctele M şi M' care au coordonatele curbilinii  $s$  respectiv  $s + \Delta s$ . În baza teoremei echilibrului părţilor, elementul de fîr izolat, trebuie să fie în echilibru sub acţiunea forţei exterioare rezultante,  $\Delta \bar{P}$ , aplicată în punctul M'' şi a forţelor interioare  $-\bar{T}(s)$  şi  $\bar{T}(s + \Delta s)$ .



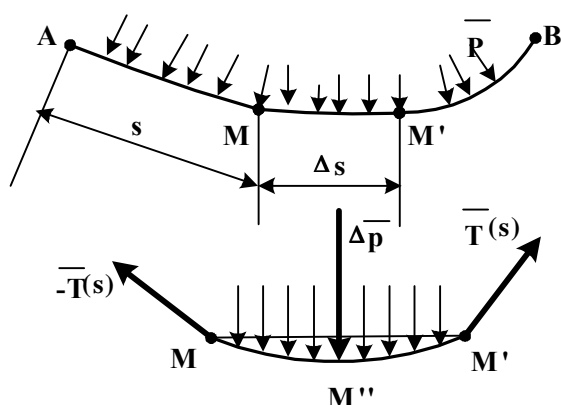


Fig. 7.3.

Se scriu următoarele ecuații vectoriale de echilibru:

$$\begin{aligned} -\bar{T}(s) + \bar{T}(s + \Delta s) + \Delta \bar{P} &= 0 \\ \overline{M'M} \times [-\bar{T}(s)] + \overline{M'M''} \times \Delta \bar{P} &= 0 \end{aligned} \quad (7.13)$$

Împărțind prin  $\Delta s$  și trecând la limită,  $\Delta s \rightarrow 0$ , se obține, pentru prima ecuație a relației (7.13)

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\bar{T}(s + \Delta s) - \bar{T}(s)}{\Delta s} + \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{P}}{\Delta s} = 0 \quad (7.14)$$

Primul termen al relației (7.14) reprezintă derivata forței interioare din fir în raport cu arcul  $s$ , iar al doilea termen reprezintă forța distribuită pe unitatea de lungime, astfel că, se poate scrie,

$$\frac{d\bar{T}}{ds} + \bar{p} = 0 \quad (7.15)$$

Pentru a doua ecuație a relației (7.13), se obține

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\overline{MM'}}{\Delta s} \times \overline{T}(s) + \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \overline{M''M'} \times \frac{\Delta \overline{P}}{\Delta s} = 0 \quad (7.16)$$

Pentru primul termen al relației (7.16), se observă că vectorul  $\frac{\overline{MM'}}{\Delta s}$  tinde, la limită, la versorul tangentei,  $\overline{\tau}$ , deoarece el este tangent la curbă în punctul M, în condițiile în care, vectorul  $\overline{MM'}$  care este dirijat după coardă, este tangent la curbă, la limită.

Al doilea termen al relației (7.16) tinde către zero pentru  $\overline{M''M'} \rightarrow 0$ , iar  $\frac{\Delta \overline{P}}{\Delta s} \rightarrow \overline{p}$ . Rezultă,

$$\overline{\tau} \times \overline{T}(s) = 0 \quad (7.17)$$

sau

$$\overline{T} = T \cdot \overline{\tau} \quad (7.18)$$

Relația (7.18) exprimă faptul că  $\overline{T}$  și  $\overline{\tau}$  sunt coliniari, iar scalarul T este totdeauna pozitiv, deoarece firele nu pot fi supuse la compresiune. Se conchide că forța interioară din fir este totdeauna orientată după direcția tangentei la fir.

#### 7.4.2. Ecuațiile diferențiale ale firelor în sistemul cartezian de coordonate

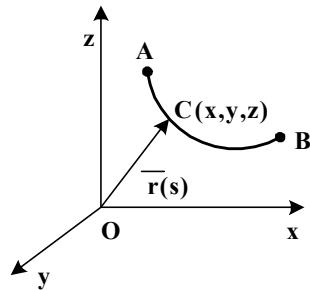


Fig. 7.4.

Deoarece forța interioară din fir,  $\overline{T}$  este orientată după direcția tangentei la fir, cosinusurile directoare sunt  $\frac{dx}{ds}$ ,  $\frac{dy}{ds}$ ,  $\frac{dz}{ds}$  deoarece vectorul de poziție al unei secțiuni oarecare, C, a firului,  $\overline{r}(s)$ , se scrie, în raport cu axele sistemului cartezian de coordonate,  $\overline{r}(s) = x(s)\overline{i} + y(s)\overline{j} + z(s)\overline{k}$ , așa cum se vede în Figura 7.4,

iar versorul  $\bar{\tau}$  al tangentei se scrie  $\bar{\tau} = \frac{d\bar{r}}{ds} = \frac{dx}{ds}\bar{i} + \frac{dy}{ds}\bar{j} + \frac{dz}{ds}\bar{k}$ .

Proiecțiile forței  $\bar{T} = T_x\bar{i} + T_y\bar{j} + T_z\bar{k}$  pe axele sistemului cartezian de coordonate, sunt, în baza relației (7.18),

$$T_x = T \frac{dx}{ds}, \quad T_y = T \frac{dy}{ds}, \quad T_z = T \frac{dz}{ds} \quad (7.19)$$

Ținând seama de relația (7.19), relația (7.15) se poate proiecta pe axele sistemului cartezian, astfel:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left( T \frac{dx}{ds} \right) + p_x &= 0 \\ \frac{d}{ds} \left( T \frac{dy}{ds} \right) + p_y &= 0 \\ \frac{d}{ds} \left( T \frac{dz}{ds} \right) + p_z &= 0 \end{aligned} \quad (7.20)$$

În sistemul de trei ecuații dat de relația (7.20) există patru necunoscute:  $x(s)$ ,  $y(s)$ ,  $z(s)$  și  $T(s)$ . A patra ecuație diferențială se obține știind că

$$\left( \frac{dx}{ds} \right)^2 + \left( \frac{dy}{ds} \right)^2 + \left( \frac{dz}{ds} \right)^2 = 1 \quad (7.21)$$

#### **7.4.3. Ecuațiile diferențiale ale firelor în sistemul Frenet de coordonate intrinseci**

Triedrul Frenet, prezentat în Figura 7.5. este un sistem cartezian triortogonal mobil, având originea într-un punct, C, al firului și ca axe: tangenta la fir în punctul considerat, având versorul  $\bar{\tau}$ , normala principală, conținută în planul osculator, având versorul  $\bar{\nu}$  și binormala, având direcția perpendiculară pe planul osculator și versorul  $\bar{\beta}$ .

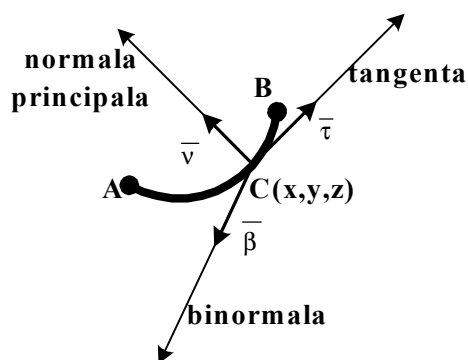


Fig. 7.5.

Se cunoaște prima formulă a lui Frenet,

$$\frac{d\bar{\tau}}{ds} = \frac{1}{\rho} \bar{\nu} \quad (7.22)$$

în care,  $\rho$  reprezintă raza de curbură a firului.

Dacă în relația (7.15) se ține seama de relația (7.18), se poate scrie

$$\frac{d(T \cdot \bar{\tau})}{ds} + \bar{p} = 0 \quad (7.23)$$

sau

$$\frac{dT}{ds} \bar{\tau} + T \frac{d\bar{\tau}}{ds} + \bar{p} \quad (7.24)$$

Se înlocuiește în relația (7.23) relația (7.22) și, punând în evidență proiecțiile forței  $\bar{p}$  pe axele triedrului Frenet,  $p_\tau$ ,  $p_\nu$ ,  $p_\beta$ , se obține

$$\frac{dT}{ds} \bar{\tau} + \frac{T}{\rho} \bar{\nu} + p_\tau \bar{\tau} + p_\nu \bar{\nu} + p_\beta \bar{\beta} = 0 \quad (7.25)$$

Din relația (7.25) se deduc trei ecuații scalare

$$\begin{aligned}\frac{dT}{ds} + p_\tau &= 0 \\ \frac{T}{\rho} + p_v &= 0 \\ p_\beta &= 0\end{aligned}\tag{7.26}$$

Ultima relație din sistemul de ecuații scalare (7.26), arată că firul ia acea formă pentru care suportul forței  $\bar{p}$ , distribuită în lungul firului după o lege oarecare, se află în planul osculator în punctul C la curba respectivă.

#### **7.4.4. Cazuri particulare ale staticii firelor**

##### **7.4.4.1. Fir neacționat de forțe exterioare**

În această situație,  $\bar{p} = 0$ , iar sistemul de ecuații scalare (7.26) devine

$$\begin{aligned}\frac{dT}{ds} &= 0 \\ \frac{T}{\rho} &= 0\end{aligned}\tag{7.27}$$

Dacă se presupune că firul este întins, atunci  $T \neq 0$  și, deci,  $\frac{1}{\rho} = 0$  și  $T = \text{const.}$ , ceea ce înseamnă că forma de echilibru a firului neacționat de forțe exterioare este o linie dreaptă, iar forța interioară care acționează în fir, este de mărime constantă.

##### **7.4.4.2. Fir acționat de forțe exterioare având direcția normală pe fir**

În această situație,  $\bar{p} = p \cdot \bar{v}$ , iar sistemul de ecuații scalare (7.26) devine

$$\begin{aligned}\frac{dT}{ds} &= 0 \\ \frac{T}{\rho} + p &= 0\end{aligned}\tag{7.28}$$

Se observă că  $T=\text{const.}$ , ceea ce înseamnă că forța interioară care acționează în fir, este de mărime constantă.

#### 7.4.4.3. Fir acționat de greutatea proprie (firul omogen greu)

În această situație, se consideră că firul este situat în planul vertical  $xOy$ , iar forța distribuită,  $\bar{p}$ , care acționează asupra firului pe unitatea de lungime este constantă în modul și egală cu greutatea firului pe unitatea de lungime. Sistemul de ecuații scalare (7.15) devine

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}\left(T \frac{dx}{ds}\right) &= 0 \\ \frac{d}{ds}\left(T \frac{dy}{ds}\right) - P &= 0 \\ \frac{d}{ds}\left(T \frac{dz}{ds}\right) &= 0\end{aligned}\tag{7.29}$$

Prin integrarea primei și ultimei relații din sistemul de ecuații (7.29), se obține:

$$T \frac{dx}{ds} = C_1; \quad T \frac{dz}{ds} = C_2\tag{7.30}$$

în care  $C_1$  și  $C_2$  sunt constante de integrare. Se împart cele două relații din expresia (7.30) și se obține

$$\frac{dz}{dx} = \frac{C_2}{C_1} = C'\tag{7.31}$$

sau

$$z = C' \cdot x + C'' \quad (7.32)$$

Relația (7.32), în care  $C' = \frac{C_2}{C_1}$  și  $C''$  sunt constantele de integrare, reprezintă ecuația unui plan vertical, ceea ce înseamnă că forma de echilibru a unui fir acționat de greutatea proprie este o curbă situată în acest plan vertical.

Dacă se consideră că planul vertical care conține forma de echilibru a firului acționat de greutatea proprie este xOy, atunci,  $C' = 0$  și  $C'' = 0$ .

Forma de echilibru a firului acționat de greutatea proprie se determină considerând în planul xOy, ecuațiile

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left( T \frac{dy}{ds} \right) - P &= 0 \\ T \frac{dx}{ds} &= C_1 \end{aligned} \quad (7.33)$$

Se obține succesiv, eliminând forța interioară care acționează în fir

$$\frac{d}{ds} \left( C_1 \frac{ds}{dx} \cdot \frac{dy}{ds} \right) - P = 0 \quad (7.34)$$

sau

$$C_1 \frac{d}{ds} \left( \frac{dy}{dx} \right) = P \quad (7.35)$$

Se știe că  $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx \sqrt{1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2}$  și înlocuind, se obține

$$C_1 \frac{dy'}{\sqrt{1+y'^2}} = P \quad (7.36)$$

sau

$$\frac{y''}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{P}{C_1} \quad (7.37)$$

Efectuând substituția  $y' = \operatorname{sh} u$ , se obține  $y'' = u' \operatorname{ch} u$  și ecuația diferențială (7.37) devine

$$\frac{u' \operatorname{ch} u}{\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 u}} = \frac{P}{C_1} \quad (7.38)$$

sau, pentru că  $\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 u} = \sqrt{\operatorname{ch}^2 u} = \operatorname{ch} u$  se obține

$$u' = \frac{P}{C_1} \quad (7.39)$$

Integrând relația (7.39) rezultă

$$u = \frac{P}{C_1} x + B_1 \quad (7.40)$$

în care  $B_1$  este constanta de integrare. Revenind la substituția făcută, se ajunge la relația

$$y' = \operatorname{sh} \left( \frac{P}{C_1} x + B_1 \right) \quad (7.41)$$

Integrând încă o dată relația (7.41), rezultă

$$y = \frac{C_1}{P} \operatorname{ch} \left( \frac{P}{C_1} x + B_1 \right) + B_2 \quad (7.42)$$



Notând  $\frac{C_1}{P} = a$ , în care  $a$  se exprimă în unități de lungime și ținând seama că  $B_1$  și  $B_2$  sunt constante de integrare, se obține

$$y = a \cdot \operatorname{ch}\left(\frac{x}{a} + B_1\right) + B_2 \quad (7.43)$$

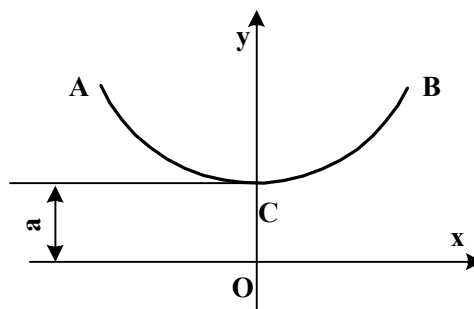
Curba astfel obținută și care este descrisă de ecuația (7.43) este cunoscută sub numele de lănișor și reprezintă forma de echilibru a firului omogen greu.

**Observația 7.4:**

Făcând o translație convenabilă de axe, se poate obține o ecuație mai simplă, sub forma

$$y = a \cdot \operatorname{ch} \frac{x}{a} \quad (7.44)$$

și care este reprezentată în Figura 7.6, vârful lănișorului găsimu-se pe axa de simetrie, Oy, la cota  $a$ .



**Fig. 7.6.**

Pentru determinarea forței interioare care acționează în fir, se utilizează relația  $T = C_1 \frac{ds}{dx}$  și știind că  $ds = \sqrt{1 + y'^2} dx$ , iar

$$y = a \cdot \operatorname{ch} \frac{x}{a}, \text{ rezultă}$$

$$T = C_1 \sqrt{1 + y'^2} = C_1 \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 \frac{x}{a}} = C_1 \operatorname{ch} \frac{x}{a} = p \cdot y \quad (7.45)$$

Lungimea unui arc de lănișor de la vârf la un punct oarecare de abscisă  $x$  este

$$\begin{aligned}
 s &= \int ds = \int_0^x \sqrt{1 + y'^2} dx = \int_0^x \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 \frac{x}{a}} dx = \int_0^x \operatorname{ch} \frac{x}{a} dx = \\
 &= a \cdot \operatorname{sh} \frac{x}{a} \Big|_0^x = a \cdot \operatorname{sh} \frac{x}{a}
 \end{aligned} \tag{7.46}$$

#### 7.4.4.4. Fir acționat de greutatea proprie și acționat de forțe interne mari (fir puternic întins)

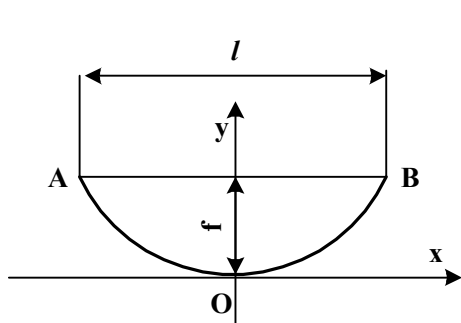
În cazul în care firul este puternic întins, atunci forța internă care acționează firul este mult mai mare decât greutatea proprie a firului și deci,  $\frac{C_1}{P} = a$  este foarte mare iar raportul  $\frac{x}{a}$  este foarte mic. Ecuația curbei lăncișorului, dată de relația (7.46) se poate dezvolta în serie și, neglijând puterile mari ale raportului  $\frac{x}{a}$ , rezultă

$$y = a \cdot \operatorname{ch} \frac{x}{a} = a \left[ 1 + \frac{1}{2!} \left( \frac{x}{a} \right)^2 + \frac{1}{4!} \left( \frac{x}{a} \right)^4 + \dots \right] \cong a + \frac{x^2}{2a} \tag{7.47}$$

care este ecuația unei parabole. Raportând această ecuație la tangenta în vârf și la axa de simetrie, ecuația parabolei devine

$$y = \frac{x^2}{2a} \tag{7.48}$$

Dacă se cunoaște distanța  $AB = l$  dintre punctele de suspendare a firului, așa cum se arată în Figura 7.7, și săgeata  $f$ , și dacă se pune condiția ca ecuația  $y = \frac{x^2}{2a}$  să fie satisfăcută pentru  $x = \frac{l}{2}$  și  $y = f$ , rezultă  $a = \frac{l^2}{8f}$ , iar ecuația parabolei se scrie



$$y = \frac{4f}{l^2} x^2 \quad (7.49)$$

Forța interioară care acționează în fir,  $T = p \cdot y$ , din cazul lăncișorului, devine, dezvoltând în serie și neglijând puterile mari ale raportului  $\frac{x}{a}$

Fig. 7.7.

$$T = p \cdot y = p \cdot a \cdot \operatorname{ch} \frac{x}{a} = p \cdot a \left[ 1 + \frac{x^2}{2a^2} + \dots \right] \cong p \cdot a = \frac{pl^2}{8f} \quad (7.50)$$

Procedând în același mod și pentru lungimea totală a firului,  $L$ , utilizând relația  $s = a \cdot \operatorname{sh} \frac{x}{a}$  pentru  $s = \frac{L}{2}$  și  $x = \frac{l}{2}$ , se obține

$$L = 2a \cdot \operatorname{sh} \frac{l}{2a} = 2a \left[ \frac{l}{2a} + \frac{1}{3!} \left( \frac{l}{2a} \right)^3 + \frac{1}{5!} \left( \frac{l}{2a} \right)^5 + \dots \right] \cong$$

$$\cong l + \frac{l^3}{24a^2} \quad (7.51)$$

expresie în care, înlocuind  $a = \frac{l^2}{8f}$ , rezultă

$$L = 1 + \frac{8f^2}{3l} \quad (7.52)$$

### 7.5. Frecarea firelor

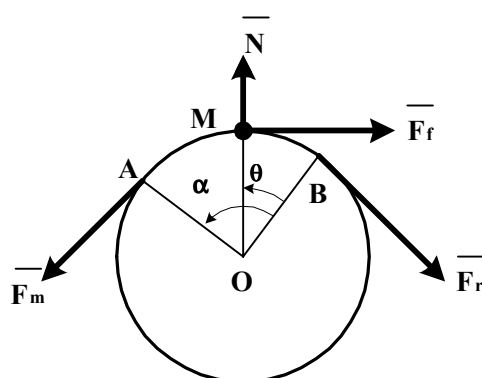


Fig. 7.8.

În Figura 7.8 se consideră un fir, AB, înfășurat pe un tambur fix de formă cilindrică și de rază  $R$ , acționat la extremitatea A de forța rezistentă  $\overline{F}_r$  și la extremitatea B de forța motoare  $\overline{F}_m$ .

Notând cu  $\alpha$  unghiul de înfășurare, cu  $\mu$  coeficientul de frecare de alunecare și cu  $\overline{N}$  și  $\overline{F}_f$  respectiv reacțiunea normală și forța de frecare pe unitatea de lungime într-un punct M corespunzător unghiului la centru  $\theta$ , ecuațiile (7.26) se scriu

$$\begin{aligned} \frac{dT}{ds} - F_f &= 0 \\ \frac{T}{R} - N &= 0 \end{aligned} \quad (7.53)$$

Ținând seama că  $ds = R d\theta$ , rezultă

$$\begin{aligned} F_f &= \frac{dT}{R d\theta} \\ N &= \frac{T}{R} \end{aligned} \quad (7.54)$$

Condiția de echilibru  $F_f \leq \mu N$  se scrie

$$\frac{dT}{R d\theta} \leq \mu \frac{T}{R} \Leftrightarrow \frac{dT}{T} \leq \mu d\theta \quad (7.55)$$

și integrând de la A la B,

$$\int_{F_r}^{F_m} \frac{dT}{T} \leq \mu \int_0^\alpha d\theta \Leftrightarrow \ln \frac{F_m}{F_r} \leq \mu\alpha \quad (7.56)$$

de unde rezultă,

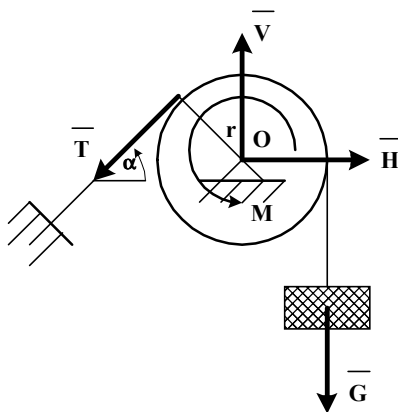
$$F_m \leq F_r \cdot e^{\mu\alpha} \quad (7.57)$$

relație stabilită de Euler

## APLICAȚII

### 1. Enunț

Cunoscând unghiul  $\alpha$ , coeficientul de frecare de alunecare,  $\mu$ , momentul,  $M$  și raza discului,  $r$ , din figură, se cere să se determine valorile forței,  $G$ , pentru care discul rămâne în repaus.



### Rezolvare

Ecuția de momente scrisă în raport cu punctul O, este

$$M + T \cdot r - G \cdot r = 0$$

de unde,

$$T = G - \frac{M}{r}$$

Aplicând formula

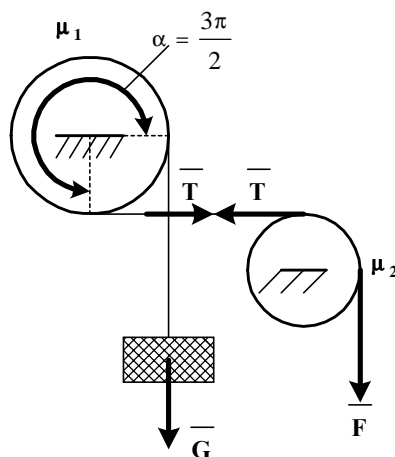
$$F_m \leq F_r e^{\mu\alpha}, \text{ rezultă}$$

$$G \leq T e^{\mu\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}, \text{ sau } G \leq \left(G - \frac{M}{r}\right) e^{\mu\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}, \text{ de unde}$$

$$G \geq \frac{M}{r} \cdot \frac{e^{\mu\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}}{e^{\mu\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)} - 1}$$

## 2. Enunț

Cunoscând greutatea  $\overline{G}$ , coeficienții de frecare  $\mu_1$  și  $\mu_2$  dintre fir și discurile din figură, se cere să se determine valoarea forței  $\overline{F}$  pentru a ține în echilibru greutatea  $\overline{G}$ .



## Rezolvare

Secționând firul în porțiunea care leagă cele două discuri și notând cu  $\overline{T}$  forța interioară care acționează în fir în această secțiune, rezultă

$$T \leq G e^{\frac{3\pi}{2}\mu_1}; \quad F \leq e^{\frac{\pi}{2}\mu_2}; \quad F \leq G e^{\frac{\pi}{2}(3\mu_1+\mu_2)}$$

Ținând seama și de celălalt sens de mișcare, se obține

$$F \geq G e^{\frac{\pi}{2}(3\mu_1 + \mu_2)}$$

Din aceste două inegalități rezultă condiția de echilibru

$$G e^{\frac{\pi}{2}(3\mu_1 + \mu_2)} \leq F \leq G e^{\frac{\pi}{2}(3\mu_1 + \mu_2)}$$

## CAPITOLUL 8

### APLICAȚIILE TEHNICE ALE STATICII

#### 8.1. INTRODUCERE

În acest capitol sunt prezentate a serie de aplicații tehnice ale staticii care fac parte din categoria dispozitivelor sau mașinilor mecanice simple.

Urmărind să-și ușureze și să-și eficientizeze munca, omul a imaginat și construit, în cursul evoluției sale, diferite dispozitive mecanice simple, pe care, ulterior, le-a perfecționat, fie în vederea utilizării lor directe, fie ca părți componente ale diferitelor mașini și instalații.

Din punct de vedere mecanic, un asemenea dispozitiv mecanic simplu, reprezintă un rigid (sau un sistem de rigide) supus acțiunii unor forțe exterioare și forțe de legătură, care sunt, în cazul cel mai general:

- o forță motoare,  $\bar{F}_m$  care determină punerea sistemului mecanic în mișcare;
- o forță rezistentă  $\bar{F}_r$  care se opune mișcării.

Întrucât sistemul de forțe care acționează asupra acestor dispozitive trebuie să fie în echilibru, rezolvarea problemelor pe care le ridică studiul echilibrului acestor sisteme mecanice, se face cu ajutorul conceptelor generale ale staticii prezentate în capitolele anterioare.

De regulă, proiectarea și construcția acestor dispozitive mecanice simple are în vedere învingerea unor forțe rezistente mari întrebuițând forțe motoare mici, accesibile unei acționări manuale. Uneori însă, forța motoare poate fi egală sau chiar mai mare decât forța rezistentă; într-o asemenea situație justificarea existenței și utilizării dispozitivului respectiv constând în posibilitatea schimbării direcției sau sensului forței motoare.

Se atrage atenția asupra faptului că toate dispozitivele mecanice simple care sunt prezentate în această lucrare au un



singur grad de libertate, reprezentat de parametrul geometric (unghi sau distanță) care îi determină poziția de echilibru.

Problema care urmează a fi rezolvată urmărește stabilirea relației care există între forța motoare și forța rezistentă pentru ca sistemul mecanic analizat să fie în echilibru static.

Deși dispozitivele mecanice simple sunt foarte numeroase, ele se pot reduce la două categorii principale:

- a) dispozitive din categoria planului înclinat: planul înclinat, pana, șurubul;
- b) dispozitive din categoria pârghiilor: pârghia, sistemele de pârghii articulate, aparatele de cântărit, trolieele, scripetii.

## **8.2. PLANUL ÎNCLINAT**

### **Definiția 8.1:**

*Planul înclinat* este un dispozitiv mecanic simplu, care servește la ridicarea și coborârea corpurilor, folosind un cablu sau un trolie (exemplu rampele de încărcare-descărcare).

Pentru studiul problemelor ridicate de statica planului înclinat, se notează cu  $\bar{Q}$  greutatea de ridicat sau de coborât și care reprezintă forța rezistentă  $\bar{F}_r \equiv \bar{Q}$  și cu  $\bar{P}$  forța motoare  $\bar{F}_m \equiv \bar{P}$  care are direcția paralelă cu planul înclinat și care reprezintă forța cu ajutorul căreia greutatea  $\bar{Q}$  este ridicată sau coborâtă pe planul înclinat.

### **Ridicarea greutăților pe planul înclinat**

Analizând Figura 8.1 a) și ținând seama de frecarea de alunecare pe planul înclinat, ecuațiile de echilibru, la limită, se scriu:

$$\begin{aligned} F - F_r \sin \alpha - \mu N &= 0 \\ N - F_r \cos \alpha &= 0 \end{aligned} \tag{8.1}$$

Rezolvând sistemul de ecuații rezultă:

$$F_m = F_r (\sin \alpha + \mu \cos \alpha) = F_r \frac{\sin(\alpha + \varphi)}{\cos \varphi} = k F_r \quad (8.2)$$

unde,  $\varphi = \arctg \mu$  reprezintă unghiul de frecare, iar cu  $k$  s-a notat expresia  $k = \sin \alpha + \mu \cos \alpha = \frac{\sin(\alpha + \varphi)}{\cos \varphi}$

Dacă se neglijează frecarea ( $\mu = 0$ ;  $k = \sin \alpha = k'$ ) relația dintre forța motoare și forța rezistentă devine

$$F_m = F_r \sin \alpha = k' F_r \quad (8.3)$$

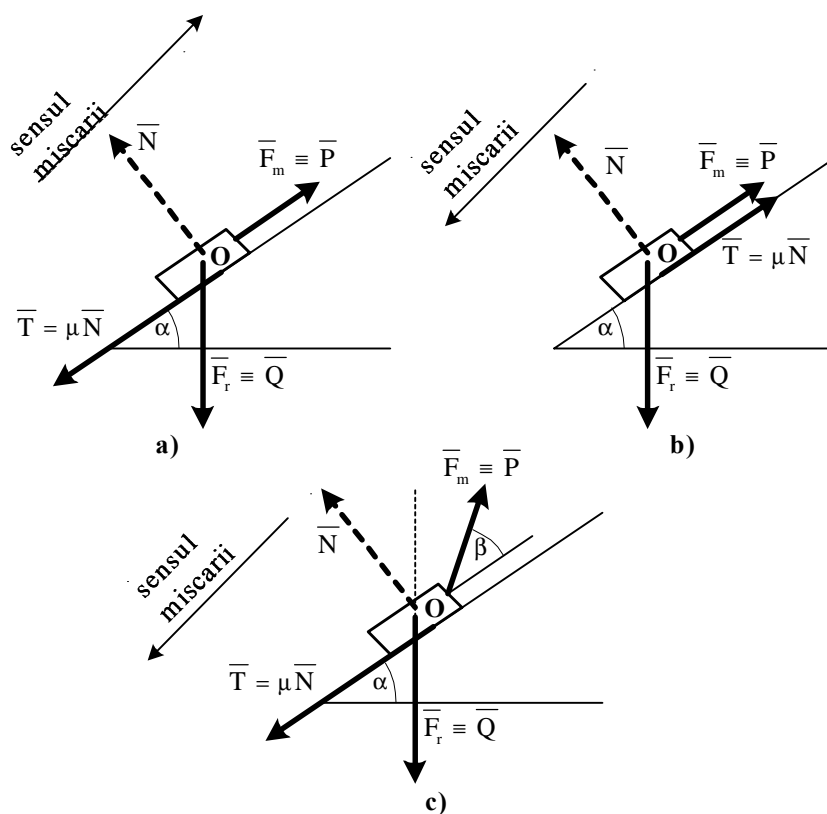


Fig. 8.1.

Comparând relațiile (8.2) și (8.3), se observă că în cazul unui plan înclinat aspru (cu frecare) este necesară o forță motoare mai mare decât în cazul planului luciu (fără frecare).

Din (8.3) rezultă că la planul înclinat luciu întotdeauna forța motoare este mai mică decât forța rezistentă ( $F_m < F_r$ ).

În cazul planului înclinat aspru se constată, din examinarea relației (8.2) că, pentru a avea forța motoare mai mică decât forța rezistentă este necesar ca termenul  $k < 1$ , adică

$$\frac{\sin(\alpha + \varphi)}{\cos \varphi} < 1 \quad (8.4)$$

respectiv

$$\sin(\alpha + \varphi) < \sin(\pi/2 - \varphi) \quad (8.5)$$

de unde rezultă

$$\alpha < \pi/2 - 2\varphi \quad (8.6)$$

În cazul când relația anterioară nu este îndeplinită, forța motoare este mai mare decât forța rezistentă ( $F_m > F_r$ ) și planul înclinat își pierde avantajul.

### **Coborârea greutăților pe planul înclinat**

În această situație, așa cum se vede în Figura 8.1 b) forța de frecare își schimbă sensul și ecuațiile de echilibru static devin:

$$\begin{aligned} F_m - F_r \sin \alpha + \mu N &= 0 \\ N - F_r \cos \alpha &= 0 \end{aligned} \quad (8.7)$$

Rezolvând sistemul de ecuații se obține:

$$F_m = F_r (\sin \alpha - \mu \cos \alpha) = F_r \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\cos \varphi} = k_1 F_r \quad (8.8)$$

$$k_1 = \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\cos \varphi} \quad (8.9)$$

Relația (8.8) dă mărimea necesară a forței motoare pentru a împiedica corpul de greutate  $\bar{Q}$  să alunece. Neglijând frecarea, relația devine

$$F_m = F_r \sin \alpha = k' F_r \quad (8.3)$$

Analizând relația  $F_m = F_r \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\cos \varphi}$  se constată că apar următoarele situații:

➤ când  $\alpha < \varphi$  atunci,  $F_m < 0$ , și deci, pentru coborârea greutateii  $\bar{Q}$  pe planul înclinat, trebuie aplicată o forță de sens contrar forței motoare. Prin urmare, se spune că greutatea  $\bar{Q}$  se autofixează pe plan datorită forțelor de frecare mari;

➤ când  $\alpha = \varphi$  atunci  $F_m = 0$  și deci, greutatea  $\bar{Q}$  se află în echilibru, la limită, pe planul înclinat (la cel mai mic deranjament, corpul începe să alunece).

### **Observația 8.1:**

În cazul în care forța motoare  $\bar{F}_m$  nu este paralelă cu planul înclinat, ci face un unghi  $\beta$ , cu acesta, așa cum se vede în Figura 8.1. c), iar planul înclinat servește pentru ridicarea greutateii  $\bar{Q} \equiv \bar{F}_r$ , ecuațiile de echilibru devin

$$\begin{aligned} F_m \cos \beta - F_r \sin \alpha - \mu N &= 0 \\ N - F_r \cos \alpha + F_m \sin \beta &= 0 \end{aligned} \quad (8.10)$$

Rezolvând sistemul de ecuații dat de relațiile (8.10), rezultă

$$F_m = \frac{\sin \alpha + \mu \cos \alpha}{\cos \beta + \mu \sin \beta} F_r = \frac{\sin(\alpha + \varphi)}{\cos(\beta - \varphi)} F_r = k' F_r \quad (8.11)$$

Dacă planul înclinat servește pentru coborârea greutatei  $\bar{Q}$ , forța de frecare își schimbă sensul și din rezolvarea ecuațiilor de echilibru static se obține

$$F_{m1} = \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\cos(\beta - \varphi)} F_r = k'_1 F_r \quad (8.12)$$

Din examinarea relației anterioare, se observă că autofixarea greutății  $\bar{Q}$  pe planul înclinat se obține, ca și în cazul precedent, atunci când unghiul de înclinare al planului nu depășește unghiul de frecare  $\alpha \leq \varphi$ .

### 8.3. PANA

#### Definiția 8.2:

*Pana* este un sistem mecanic simplu, având forma unui corp prismatic cu una sau două fețe opuse înclinate. Secțiunea transversală a penei are forma unui trapez isoscel sau dreptunghic, iar unghiul format de laturile neperalele ale trapezului se numește *unghiul penei*.

În Figura 8.2, a) și b), sunt prezentate penele cu dublă, respectiv simplă înclinare. De obicei, pana se montează prin batere cu ciocanul.

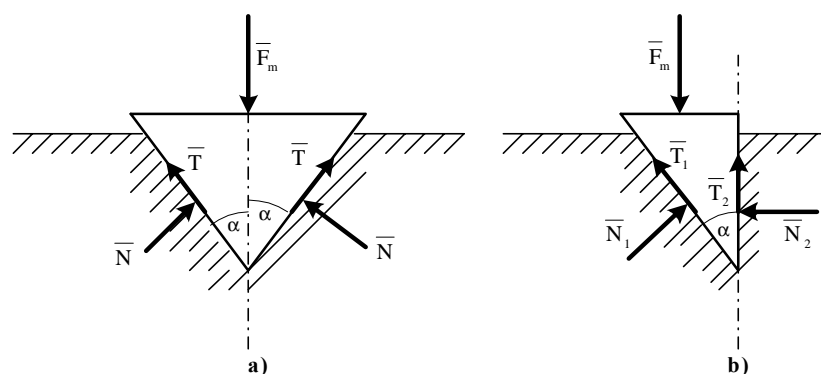


Fig. 8.2.

Pana servește pentru realizarea unei asamblări demontabile a două organe de mașini (de exemplu, tija pistonului cu capul de cruce, sau o roată cu un arbore). De asemenea, pana formează partea principală a uneltelor de spart, tăiat și strunjit (cuțit, foarfece, topor, daltă, lama strungului).

Pentru o utilizare eficientă, este necesar ca forța motoare  $\bar{F}_m$  care înfinge pana în locașul ei să învingă rezistențele opuse de corpul în care pana este introdusă, și anume, reacțiunile normale și forțele de frecare.

Dacă se consideră că pana apasă uniform pe toată suprafața de contact cu corpul în care este introdusă, atunci rezultantele reacțiunilor normale din punctele de contact și rezultantele forțelor de frecare se află în planul transversal împreună cu forța motoare, formând un sistem de forte coplanare.

#### **Pana simetrică, cu dublă înclinare**

În cazul echilibrului la limită, ecuațiile de echilibru static sunt:

$$\begin{aligned} 2N \sin \alpha + 2T \cos \alpha - F_m &= 0 \\ T &= \mu N \end{aligned} \quad (8.13)$$

Rezolvând sistemul de ecuații dat de relația (8.13), se obține

$$F_m = 2N(\sin \alpha + \mu \cos \alpha) = 2N \frac{\sin(\alpha + \varphi)}{\cos \varphi} \quad (8.14)$$

Când se scoate pana, tendința de mișcare fiind în sens opus, se schimbă sensul forțelor de frecare și se obține

$$F_m = 2N(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) = 2N \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\cos \varphi} \quad (8.15)$$

Analizând relația (8.15) se poate observa că pentru a se scoate pana, trebuie să se aplice o forță de sens contrar lui  $\bar{F}_m$ , deci este nevoie să se tragă de pană.

Prin urmare, condiția  $\alpha < \varphi$  reprezintă condiția de autofixare a penei simetrice, cu dublă înclinare.

### **Pana asimetrică, cu simplă înclinare**

În cazul echilibrului la limită, ecuațiile de echilibru static sunt:

$$\begin{aligned} N_2 - N_1 \cos \alpha - T_1 \sin \alpha &= 0 \\ F_m - T_1 \cos \alpha - N_1 \sin \alpha - T_2 &= 0 \\ T_1 &= \mu N_1 \\ T_2 &= \mu N_2 \end{aligned} \quad (8.16)$$

Rezolvând sistemul de ecuații dat de relația (8.16), se obține

$$\begin{aligned} F_m &= T_1 \cos \alpha + N_1 \sin \alpha + T_2 = \\ &= N_1 [\sin \alpha + \mu (\cos \alpha - \mu \sin \alpha) + \mu \cos \alpha] = \\ &= N_1 (\sin \alpha + 2\mu \cos \alpha - \mu^2 \sin \alpha) \end{aligned} \quad (8.17)$$

În relația (8.17) se neglijează termenul  $\mu^2$  care este foarte mic și se scrie

$$F_m = N_1 \cos \alpha (\operatorname{tg} \alpha + 2\mu) = N_1 \cos \alpha (\operatorname{tg} \alpha + 2\operatorname{tg} \varphi) \quad (8.18)$$

La scoaterea penei, ecuația devine

$$F_m = N_1 \cos \alpha (\operatorname{tg} \alpha - 2\mu) = N_1 \cos \alpha (\operatorname{tg} \alpha - 2\operatorname{tg} \varphi) \quad (8.19)$$

Analizând relația (8.19) se deduce condiția de autofixare a penei cu simplă înclinare,

$$\operatorname{tg} \alpha < 2\operatorname{tg} \varphi \Leftrightarrow \alpha < 2\varphi \quad (8.20)$$

relația (8.20) este valabilă deoarece unghiurile sunt foarte mici

și se poate aproxima valoarea funcției trigonometrice prin valoarea corespunzătoare a unghiului.

#### 8.4. ȘURUBUL

##### Definiția 8.3:

*Șurubul* este un organ de mașină care poate servi pentru:

- realizarea unor asamblări demontabile cu strângere (șuruburi de fixare cu filet triunghiular);
- transmiterea mișcării prin transformarea mișcării de rotație în mișcare de translație și invers (șuruburi de mișcare cu filet pătrat, trapezoidal, ferăstrău sau rotund);
- reglarea poziției relative a două piese sau eliminarea jocurilor de uzură (șuruburi de reglaj cu filet triunghiular);
- măsurarea lungimilor (șuruburi micrometrice cu filet triunghiular sau pătrat).

Din punct de vedere geometric, șurubul este construit, așa cum se arată în Figura 8.3, ducând pe suprafața laterală desfășurată a unui cilindru circular drept o serie de dreptunghiuri egale ce au diagonalele înclinate cu același unghi.

Prin înfășurarea la loc a suprafeței laterale a cilindrului, diagonalele dreptunghiurilor se dispun pe o curbă continuă numită elice.

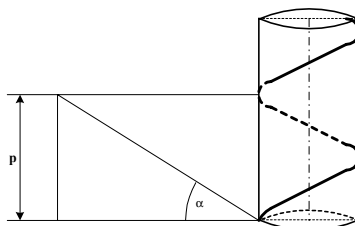


Fig. 8.3.

La orice șurub se întâlnesc următoarele elemente teoretice și constructive caracteristice:

- *elicea*, adică curba în spațiu care taie sub un unghi constant (numit unghiul de înclinare al elicei) generatoarele unui cilindru sau con (forma geometrică a corpului șurubului);



- *pasul elicei*,  $p$ , care reprezintă distanța dintre două spire consecutive ale aceleiași elice, măsurată pe direcția generatoarei;
- *filetul* care este profilul în relief rezultat din purtarea de-a lungul elicei a unui profil oarecare numit profil generator (triunghiular, pătrat, trapezoidal, fierăstrău, rotund);
- *diametrul exterior* al vârfului filetului și *diametrul interior* al fundului filetului (diametrul de rezistență).

Principalele părți componente ale unei asamblări realizate prin intermediul unui șurub sunt: șurubul, piulița și șaiba.

La folosirea șuruburilor se deosebesc patru cazuri posibile:

- a) *șurubul fix și piulița mobilă* (bulonul de strângere; șurubul de asamblare). În acest caz, piulița ghidată de șurub capătă o mișcare elicoidală deplasându-se în lungul șurubului cu  $p$  milimetri pentru  $n$  rotații;
- b) *șurubul mobil și piulița fixă* (prese cu șurub, cricul). În această situație șurubul ghidat de piuliță capătă o mișcare elicoidală în raport cu aceasta, la  $n$  rotații deplasându-se în lungul axei sale cu o lungime de  $p$  milimetri;
- c) *șurub numai cu mișcare de rotație și piuliță numai cu mișcare de translație* (masa mobilă a mașinilor unelte, șuruburile micrometrice);
- d) *șurub numai cu mișcare de translație și piuliță numai cu mișcare de rotație* (cheia franceză, șurubul binoclului).

În cele ce urmează se tratează numai mecanismul la care șurubul este mobil și piulița este fixă, filetul fiind pătrat. Rezultatele care se obțin sunt valabile și pentru celelalte cazuri.

În Figura 8.4 este reprezentat un șurub de rază  $R$  cu unghiul de înclinare al elicei,  $\alpha$ , care este acționat prin intermediul brațului de pârghie  $AB = l$  de forța motoare  $\bar{F}_m$  perpendiculară pe planul făcut de  $AB$  și axa  $AC$  a șurubului.

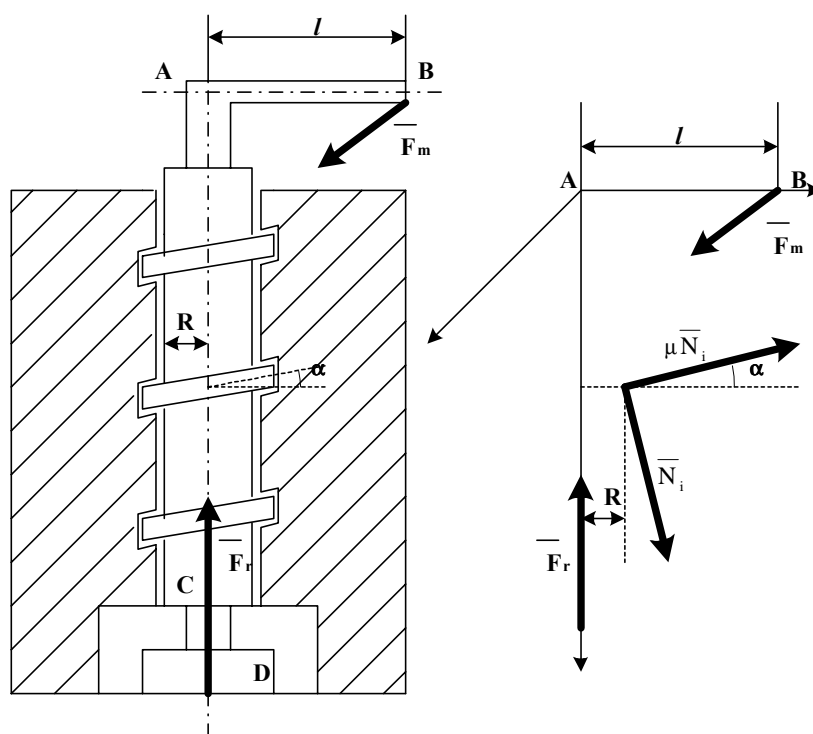


Fig. 8.4.

Datorită acțiunii forței  $\overline{F}_m$ , în punctul C se va produce o reacțiune  $\overline{F}_r$  îndreptată după axa AC, egală și direct opusă cu forța pe care șurubul o exercită în C asupra corpului D pe care îl presează (presa cu șurub).

În ipoteza că în toate punctele dintre flancul șurubului și cel al piuliței se realizează contacte, forțele care acționează șurubul sunt:

- cuplul motor de moment  $M_m = F_m \cdot l$  care este dirijat după o direcție coliniară cu axa șurubului;
- forța rezistentă  $\overline{F}_r$  transmisă de corpul presat, având direcția axei șurubului și sensul opus celui de înaintare al șurubului;

➤ reacțiunile normale  $\bar{N}_i$  care apar în toate punctele de contact ale filetului șurubului cu filetul piuliței, ca fiind transmise de piuliță;

➤ forțele de frecare  $\bar{T}_i = \mu \bar{N}_i$ , tangente la filet, care apar în toate punctele de contact dintre șurub și piuliță.

Sub acțiunea acestor forte, șurubul se află în echilibru. Se pune problema determinării momentului motor,  $\bar{M}_m$  și a forței rezistente,  $\bar{F}_r$ .

Pentru rezolvare, se scriu ecuațiile scalare de echilibru la limită, pentru cazul înșurubării

$$\begin{aligned} -F_r + \sum_{i=1}^n N_i \cos \alpha - \sum_{i=1}^n \mu N_i \sin \alpha &= 0 \\ M_m - \left( \sum_{i=1}^n N_i \sin \alpha + \sum_{i=1}^n \mu N_i \cos \alpha \right) R &= 0 \end{aligned} \quad (8.21)$$

se obține,

$$\begin{aligned} F_r &= (\cos \alpha - \mu \sin \alpha) \sum_{i=1}^n N_i \\ M_m &= R (\sin \alpha + \mu \cos \alpha) \sum_{i=1}^n N_i \end{aligned} \quad (8.22)$$

Pentru momentul motor maxim, se obține, eliminând  $\sum_{i=1}^n N_i$  între relațiile din (8.22)

$$M_{m_{\max}} = F_r \cdot R \frac{\sin \alpha + \mu \cos \alpha}{\cos \alpha - \mu \sin \alpha} = F_r \cdot R \operatorname{tg}(\alpha + \varphi) \quad (8.23)$$

În cazul deșurubării, momentul motor își schimbă sensul și, deci,

$$M_{m_{\min}} = F_r \cdot \text{Rtg}(\alpha - \varphi) \quad (8.24)$$

pentru realizarea echilibrului static, este necesară respectarea relației

$$F_r \cdot \text{Rtg}(\alpha - \varphi) \leq M_m \leq F_r \cdot \text{Rtg}(\alpha + \varphi) \quad (8.25)$$

### 8.5. PÂRGHIA

#### Definiția 8.4:

Un solid rigid cu un punct fix sau cu o axă fixă, acționat de o forță motoare,  $\vec{P}$  și de o forță rezistentă,  $\vec{Q}$ , având suporturile conținute într-un plan normal pe axa de rotație, se numește *pârghie*.

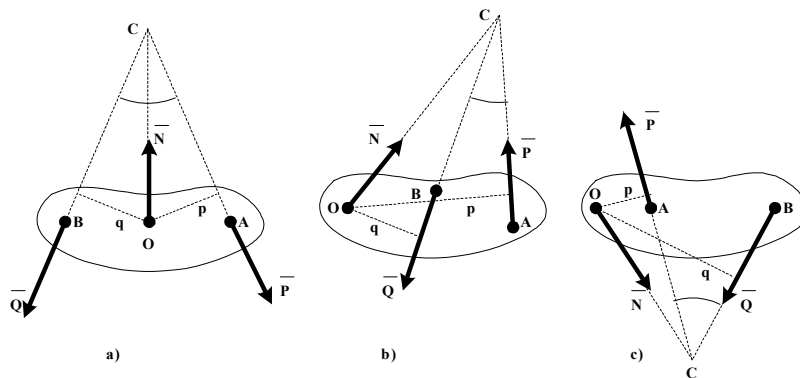


Fig. 8.5.

După poziția relativă ocupată de punctul fix față de forța motoare  $\vec{P}$  și forța rezistentă,  $\vec{Q}$ , pârghiile sunt de trei categorii, așa cum se vede și în Figura 8.5.

- pârghii de ordinul întâi, a);
- pârghii de ordinul doi, b), care satisfac condiția  $p > q$ ;
- pârghii de ordinul trei c), care satisfac condiția  $p < q$ .

Condiția de echilibru a unei pârghii, neglijând frecarea în articulație, este

$$P \cdot p - Q \cdot q = 0 \quad (8.26)$$

sau

$$P = \frac{q}{p} Q \quad (8.27)$$

În cazul pârghiilor de ordinul întâi se pot întâlni următoarele situații:

- $q = p$ , deci  $P = Q$ , cazul balanțelor cu brațe egale;
- $p > q$ , deci  $P < Q$ , cazul pârghieii care economisește forța motoare;
- $p < q$ , deci  $P > Q$

În cazul pârghiilor de ordinul doi, întotdeauna  $p > q$  și  $P < Q$ .

Dacă se ia în considerare frecarea în din articulație, relația (8.26), devine

$$P \cdot p - Q \cdot q - \mu N \cdot r = 0 \quad (8.28)$$

unde s-a notat cu  $\mu$  coeficientul de frecare din articulație și cu  $r$ , raza fusului, iar cu  $N$  mărimea reacțiunii care este dată de relația

$$N = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ \cos \alpha} \quad (8.29)$$

Din relațiile (8.28) și (8.29) rezultă condiția de echilibru,

$$P \cdot p = Q \cdot q + \mu \cdot r \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ \cos \alpha} \quad (8.30)$$

Dacă dreptele suport ale forțelor  $\vec{P}$  și  $\vec{Q}$  sunt paralele, deci  $\alpha = 0$ , relația (8.30) devine

$$P = \frac{q}{p} \cdot \frac{1 + \frac{\mu \cdot r}{p}}{1 - \frac{\mu \cdot r}{p}} Q \quad (8.31)$$

Comparând relațiile (8.27) și (8.31) se observă că raportul  $\frac{q}{p}$  se multiplică cu o mărime supraunitară,

$$k = \frac{1 + \frac{\mu \cdot r}{p}}{1 - \frac{\mu \cdot r}{p}} > 1$$

deci forța motoare necesară în cazul în care se ia în considerare frecarea este, în mod firesc, mai mare decât în cazul neglijării frecării.

## 8.6. TROLIUL

### Definiția 8.5:

Un sistem de două roți concentrice solidare sau o manivelă solidară cu un cilindru având aceeași axă de rotație, se numește *trolu*.

Troliile servesc la ridicarea greutăților și sunt des utilizate pe șantierul de construcții, în șantierul naval și la bordul navelor.

Dacă se neglijează frecările din lagăre, rigiditatea cablului și greutatea acestuia, ecuația de momente, în raport cu axa de rotație, este, corespunzător notațiilor din Figura 8.6,

$$P \cdot R - Q \cdot r = 0 \quad (8.32)$$

sau,

$$P = \frac{r}{R} Q \quad (8.33)$$

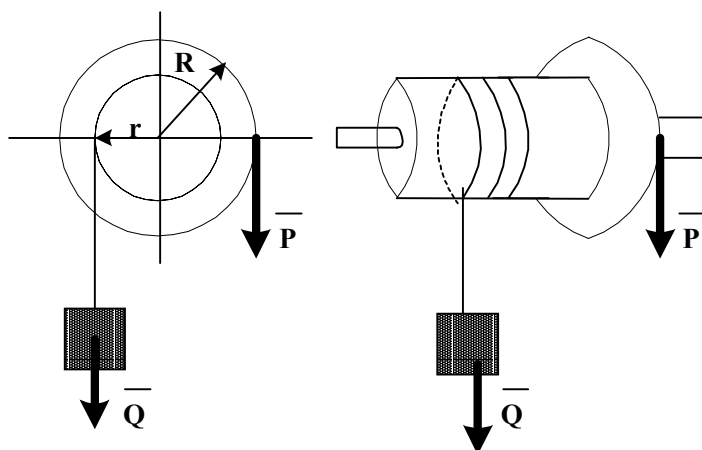


Fig. 8.6.

Dacă se ține seama de greutatea proprie a cablului pe unitatea de lungime,  $q$ , și notând cu  $y$  lungimea porțiunii de cablu care atârână, relația (8.32) devine

$$P = (Q + qy) \frac{r}{R} \quad (8.34)$$

Se observă că forța  $\bar{P}$  variază cu lungimea,  $y$ , a cablului desfășurat. Pentru a se menține constantă mărimea forței  $\bar{P}$  în timpul ridicării greutății  $\bar{Q}$ , se utilizează troliile reglatoare care au tamburi tronconici.

## 8.7. SCRIPETELE

### Definiția 8.6:

*Scriptele* este un dispozitiv mecanic format dintr-un disc circular, pe periferia căruia trece, printr-un șanț, un cablu la capetele căruia se aplică diverse forțe.

După poziția pe care o are axa scripetelui, se deosebesc două categorii de scripeți:

- scripeți fiși (Figura 8.7, a), a căror axă este fixă;

➤ scripeteți mobili (Figura 8.7. b), a căror axă se poate deplasa.

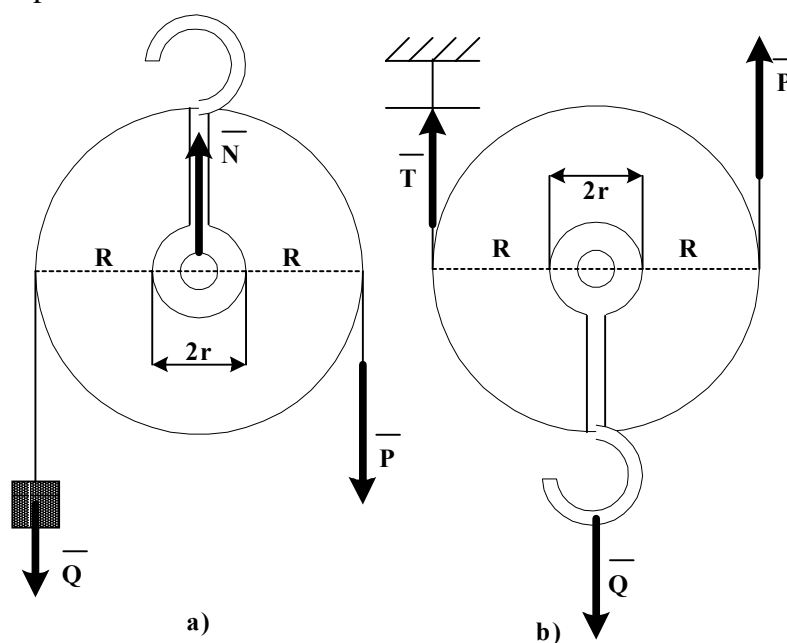


Fig. 8.7.

Condiția de echilibru a unui scripete fix poate fi exprimată în două moduri, astfel:

a) dacă se neglijează frecarea în articulația fixă, O,

$$P \cdot R - Q \cdot R = 0 \Leftrightarrow P = Q \quad (8.35)$$

b) dacă se consideră frecarea din articulație,

$$P \cdot R - Q \cdot R - \mu N \cdot r = 0 \quad (8.36)$$

unde s-a notat cu  $\mu$  coeficientul de frecare din articulație și cu  $r$ , raza fusului, iar cu  $N$  mărimea reacțiunii.

Dacă forțele  $\bar{P}$  și  $\bar{Q}$  sunt paralele, relația (8.36) se scrie sub forma,



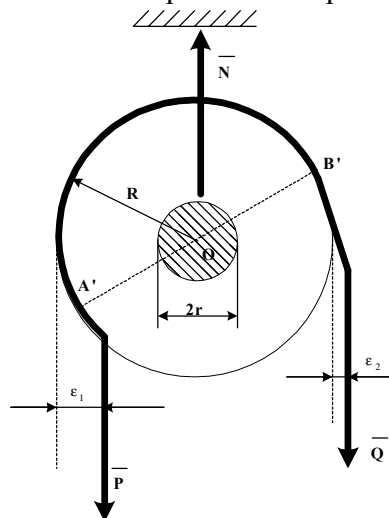
$$P = \frac{R + \mu r}{R - \mu r} Q \quad (8.37)$$

În determinarea relației dintre forța motoare,  $\bar{P}$ , și forța rezistentă,  $\bar{Q}$ , trebuie introdus și efectul rigidității firului (în realitate, firul nu este perfect flexibil).

**Observația 8.1:**

Evaluarea rigidității la încovoiere a firului este, în general, o problemă dificilă, care este rezolvată cu mijloace teoretice specifice rezistenței materialelor. În cele ce urmează, se prezintă o metodă simplificată de studiu.

În Figura 8.8. se consideră un scripete fix. Din cauza rigidității firului, atunci când se aplică forța  $\bar{P}$  necesară pentru a ridica greutatea  $\bar{Q}$ , firul este tangent scripetelui la capetele unui diametru  $A'B'$  înclinat față de orizontală. Porțiunea din fir asupra căreia se aplică forța motoare  $\bar{P}$  se apropie cu o distanță  $\varepsilon_1$  de centru, iar cealaltă parte se depărtează cu o distanță  $\varepsilon_2$ . În aceste condiții, echilibrul scripetelui se exprimă cu relația



**Fig. 8.8.**

#### APLICAȚIILE TEHNICE ALE STATICII

$$P(R - \varepsilon_1) - Q(R - \varepsilon_2) - \mu \cdot r(P + Q) = 0 \quad (8.38)$$

sau

$$P = Q \left[ 1 + \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{R} + 2\mu \frac{r}{R} \right] = kQ \quad (8.39)$$

Se observă că, în cazul unui scripete fix, întotdeauna forța motoare  $\bar{P}$  este mai mare decât forța rezistentă  $\bar{Q}$ , deoarece  $k > 1$ .

Condiția de echilibru a unui scripete mobil, dacă se ține seama de rigiditatea firului și de frecare, se exprimă prin ecuațiile:

$$\begin{aligned} P &= kT \\ P + T &= Q \end{aligned} \quad (8.40)$$

Rezultă,

$$P = \frac{k}{k+1} Q \quad (8.41)$$

Se observă că  $P < Q$ , deci scripetele mobil permite demultiplicarea forței motoare.

## BIBLIOGRAFIE

- [1] **Arnold, V.I.**, *Modele matematice ale mecanicii clasice*, Editura Științifică și Enciclopedică, București, 1980.
- [2] **Atanasiu, M.**, *Mecanica tehnică*, Editura Tehnică, București, 1969.
- [3] **Beleş, A., Voinea, R.**, *Rezistența materialelor II*, Editura Tehnică, București, 195.
- [4] **Bia, C., Ilie, V., Soare, M. V.**, *Rezistența materialelor și teoria elasticității*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1983.
- [5] **Ceașu, V., Enescu, N.**, *Culegere de probleme de mecanică statică*, Institutul Politehnic, București, 1974.
- [6] **Hangan, S., Slătineanu, I.**, *Mecanica*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1983.
- [7] **Iacob, C.**, *Mecanica teoretică*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1957.
- [8] **Kümbetlian, G.**, *Rezistența materialelor*, vol I., Institutul de Marină Civilă, Constanța, 1992.
- [9] **Niță, M.**, *Curs de mecanică teoretică*, Academia Militară, București, 1972.
- [10] **Onicescu, O.**, *Mecanica*, Editura Tehnică, București, 1969.

- [11] **Peride, N.**, *Rezistența materialelor* , Institutul de subingineri, Constanța, 1983.
- [12] **Peride, N.**, *Rezistența materialelor* , Ovidius University Press, Constanța, 2001.
- [13] **Peride, N.**, *Rezistența materialelor* , Ovidius University Press, Constanța, 2002.
- [14] **Peride, N., Chircor, M., Zăgan, R.**, *Încercări tehnologice și de rezistență ale materialelor metalice* , Ovidius University Press, Constanța, 2002.
- [15] **Poterasu, V.F., Popescu, D.**, *Curs de mecanică teoretică*, vol. I, Iași, 1995.
- [16] **Poterasu, V.F., Popescu, D.**, *Curs de mecanică teoretică*, vol. II, Iași, 1995.
- [17] **Rădoi, M., Deciu, E.**, *Mecanica*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1977.
- [18] **Ripianu, A., Popescu, P., Bălan, B.**, *Mecanică tehnică* , Editura Didactică și Pedagogică, București, 1979.
- [19] **Roșca, I.**, *Mecanica pentru ingineri*, Editura MatrixRom, București, 1998.
- [20] **Sarian, M.**, *Probleme de mecanică pentru ingineri și subingineri* , Editura Didactică și Pedagogică, București, 1975.
- [21] **Silaș, Gh.**, *Mecanica. Vibrații mecanice*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1986.

- [22] **Staicu Șt.**, *Introducere în mecanica teoretică*, Editura Științifică și Enciclopedică, București, 1983.
- [23] **Staicu, Șt.**, *Aplicații ale calculului matriceal în mecanica solidelor*, Editura Academiei Române, București, 1986.
- [24] **Staicu, Șt.**, *Mecanica analitică și vibrații*, Editura MatrixRom, București, 1998.
- [25] **Stoenescu, A., Ripianu, A., Atanasiu, M.**, *Culegere de probleme de mecanică*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1963.
- [26] **Țăposu, I.**, *Teorie și probleme de mecanică newtoniană*, Editura Tehnică, București, 1996.
- [27] **Vîlcovici, V., Bălan, St., Voinea, R.**, *Mecanica teoretică*, Editura Tehnică, București, 1968.
- [28] **Vinaroski, R.**, *Mecanica teoretică*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1968.
- [29] **Voinea, R., ș.a.**, *Introducere în mecanica solidului cu aplicații în inginerie*, București, Editura Academiei, 1989.
- [30] **Voinea, R., Voiculescu, D.**, *Mecanica*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1975.
- [31] **Voinea, R., Voiculescu, D., Ceașu, V.**, *Mecanica*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1984.